ISSN 0494-7304 0132-053x

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED

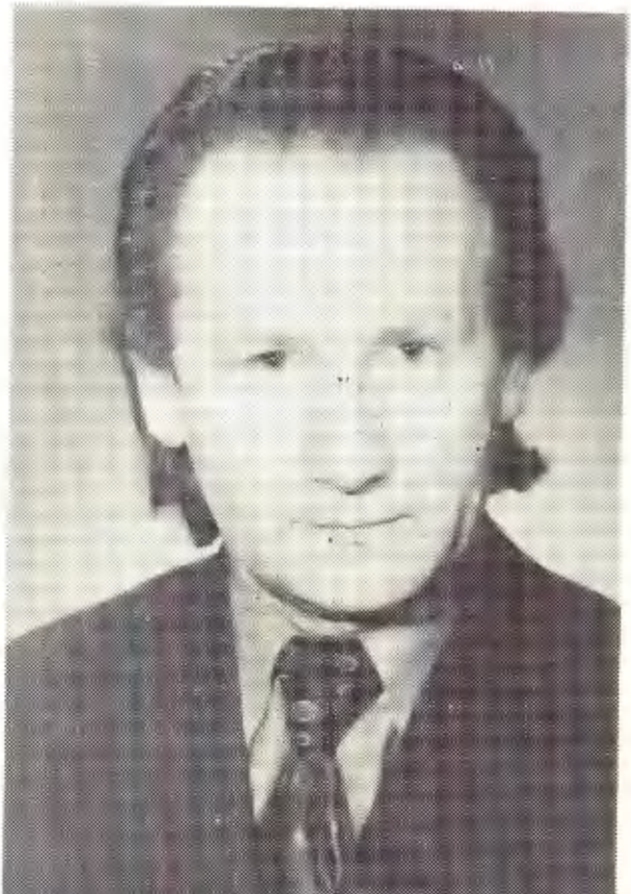
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

846

ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Труды по математике и механике

TARTU 1989



TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 846 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г

ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Труды по математике и механике

ТАРТУ 1989

Vastutav toimetaja: E.Reimers

Tartu Ülik. Toimetised. Уч.зап.
Тартуск. ун-та, 1989, 846, 3-5.

DOTSENT ELMAR REIMERS 60

11. märtsil 1989.a. tähistas oma juubelit Tartu Riikliku Ülikooli õppejõud, füüsika-matemaatikakandidaat dotsent Elmar Reimers, kes on enam kui 30 aasta jooksul olnud õpetajaks meie vabariigi paljudele matemaatikutele, füüsikutele, kuid ka mitmete teiste erialade inimestele TRÜ vilistlaste seas.

Elmar Reimers sündis Gatšinas. Sõjakeerises sattus ta koos perekonnaga Tallinna, kus 1949.a. lõpetas kuldmedaliga Tallinna 20. keskkooli. Seejärel astus ta Tartu Riikliku Ülikooli matemaatikat õppima. Üliõpilasaastail ilmutas E. Reimers end võimeka ning teaduslike huvidega noorena, mistõttu prof. G.Kangro valis ta enda õpilaseks. Peale ülikooli kiitusega lõpetamist 1954.a. sai Elmar Reimersist prof. G.Kangro aspirant ning ta asus uurima summeeruvusteooria probleeme, olles sellel alal üheks esimestest prof. G.Kangro aspirantidest. Elmar Reimersist kujunes Tartu summeeruvuskoolkonna üks esimesi ja olulisemaid liikmeid, kelle panus selle prof. G.Kangro poolt loodud ning laialdaselt tuntud koolkonna töödesse on märkimisväärne. Sellest aga edasises.

Peale aspirantuuri lõpetamist 1957.a. sai Elmar Reimersist Tartu Riikliku Ülikooli geomeetria kateedri vanemõpetaja. Kui prof. G.Kangrost sai 1959.a. matemaatilise analüüsi kateedri juhataja, siis sai ka Elmar Reimersist selle kateedri vanemõpetaja ning 1963. aastast dotsent, kellena ta töötab tänaseni, olles vaid aastatel 1966-68 vanemteaduri kohal. Nende enam kui 30 tööaasta jooksul on dots. E.Reimers lugenud väga mitmeid kursusi erinevate erialade üliõpilastele, on läbi viinud praktikume ja seminare ning olnud juhendajaks paljudele matemaatika-üliõpilastele kursuse- ja diplomitööde koostamisel. Selles suures töös on dotsent E.Reimersit saatnud heasoovlikkus ja nõudlikkus, täpsus ja rahulikkus, tagasihoidlikkus ja pedagoogiline takt, aga ka suur lugupidamine oma kolleegide ja õpilaste vastu. See kõik on taganud temale suure autoriteedi nii õppejõudude kui ka üliõpilaste seas.

Kõige enam on dots. E.Reimers olnud seotud matemaatilise analüüsi õpetamisega nii matemaatikutele kui ka füüsikutele. Ta oli koos dots. S.Baroniga põhiliseks autoriks neljaosalisele rotaprindi väljaandele "Matemaatilise analüüsi praktikum"[14,18,21,24], mis mitmete trükkidena on olnud hindamatuks materjaliks väga paljudele üliõpilastele selle klassikalise distsipliini põhitõdede omandamisel. Peale dots S.Baroni lahkumist hakkas E.Reimers sellele väljaandele omaseid metoodilisi ideid edasi arendama ning vastava töö tulemusena on meil nüüd kirjastuse "Valgus" vahendusena kaheosaline "Matemaatilise analüüsi praktikum" [40,41], mis kujutab endast suure väärtusega teost ning kahtlemata annab oma olulise osa matemaatilise hariduse täiustamisel meie vabariigis.

Dotsent E.Reimers on olnud õppejõud, kes küllalt suurt tähelepanu on pööranud õppemetoodilisele tööle. Selle tulemuseks on olnud ülalmärgitud teosed, mitmed teised õppevahendid [28,37], aga ka esinemised metoodikaalastel konverentsidel ja nõupidamistel [36].

Erilist märkimist väärib aga dotsent Elmar Reimersi töö matemaatika-alaste tööde publitseerimisel. Ta on olnud toimetajaks paljudele teaduslike tööde kogumikele, aga ka G. Kangro õpiku "Matemaatiline analüüs I" 2. trükile. Selles töös on ta annud hindamatut abi paljudele kolleegidele ning olnud nõudlikuks õpetajaks paljudele noorematele autoritele.

E.Reimersi esimeseks teaduslikuks uurimisalaks oli hajuvate ridade teoorias tuntud Cauchy korrutisrea summeeruvuse probleem. Keskväärtusteoreemide abil leidis ta täpsed tingimused Cauchy korrutisrea summeeruvuseks ja absoluutseks summeeruvuseks juhul, kui üks tegurridadest on absoluutselt koonduv [1,3]. Seejärel tõestas ta keskväärtusteoreemid kahekordsete jadade korral ja lahendas sama probleemi kahekordsete summeeruvate ridade korrutise jaoks [2,4]. Need tulemused moodustavad tema kandidaadidissertatsiooni [5] põhiosa.

Seejärel siirdus E.Reimers oma teaduslikes uurimustes Tauberi teoreemide üldise teooria alale. Olgu A mingi kolmnurkne maatriks-summeerimismenetlus. Kasutades omaloodud meetodit leidis ta täpsed ja efektiivsed piisavad tingimused selleks, et A-summeeruv jada oleks koonduv või summeeruv mingi teise maatriksmenetlusega [9]. Koonduvustingimused ta üldistas ka mittekolmnurksete maatriks-summeerimismenetlustele [23]. Töös [26] võttis E.Reimers kasutusele nn. multiplikaatormenetlused, mille abil on samuti võimalik tõestada mitmesuguseid tingimusi A-summeeruva jada koonduvuseks. Lisaks leidis ta veel sellised Tauberi tingimused koonduvuseks, mis sõltuvad vaadeldavast jadast [28].

Töödes [26,27,31] vaatles E.Reimers üldisemat probleemi kui seda on Tauberi probleem - nimelt jada ja tema A-teisendi ekvivalentsuse probleemi. Ta leidis täpsed, aga ka efektiivsed piisavad tingimused nende jadade ekvivalentsuseks. Saadud tulemustest erijuhuna tulevad välja vaadeldavad Tauberi tüüpi teoreemid.

Ekvivalentsusteoreemide tõestusmeetod laieneb ka kahekordsetele jadadele ja jälle erijuhuna saadud ekvivalentsuse tulemusest järelduvad Tauberi tüüpi teoreemid kahekordsete summeeruvate jadade jaoks [42].

Töödes [10,12,13] võttis E.Reimers kasutusele nn kontinuaalsed summeerimismenetlused, mis on maatriksmenetluste üldistusteks. Avaldades originaalsel viisil mõõtuvad funktsioonid arvjadade kaudu, näitas ta, et kontinuaalsed menetlused võivad sisaldа endas erijuhuna Lebesgue'i integraali.

Kontinuaalsete summeerimismenetluste omadustest tuleb esile tõsta järgmist. Nagu teada ei saa regulaarne maatrikssummeerimismenetlus summeerida kõiki tõkestatud jadasid. Kuid regulaarsete kontinuaalsete summeerimismenetluste seas on olemas ka sellised, mis summeerivad kõiki tõkestatud jadasid. Need tulemused kontinuaalsete summeerimismenetluste alalt moodustavad tema doktoridissertatsiooni [16] põhiosa. Kahjuks aga meil valitsenud ja senini valitsev bürokraatlik süsteem teaduslike kraadide kaitsmisel ei olnud ühildatav dotsent Elmar Reimersi tagasihoidlikkuse ja eneseväärikusega, mistõttu see küllaltki oluliste teaduslike ideedega dissertatsioon ei jõudnud kaitsmiseni.

Koos Eesti matemaatikaüldsusega õnnitleme dotsent Elmar Reimersit juubeli puhul ning soovime talle edaspidiseks palju loomingulist rõõmu.

E.Jürimäe, H.Türnpu

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989, 846, 6-10.

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ДОЦЕНТА Э.РЕЙМЕРСА

11 марта исполнилось 60 лет со дня рождения доцента кафедры математического анализа Тартуского госуниверситета Эльмара Реймерса. После окончания математического отделения Тартуского госуниверситета в 1954 году он поступил в аспирантуру при кафедре математического анализа, где под научным руководством профессора Г.Кангро написал свою кандидатскую диссертацию [4], которую успешно защитил в 1958 году. Свою педагогическую деятельность в университете Э.Реймерс начал в 1957 году. Звание доцента он получил в 1963 году.

На протяжении более чем 30 лет педагогической работы в Тартуском университете доц. Э.Реймерс читал много различных курсов по высшей математике для студентов математиков и физиков, руководил семинарами и практическими занятиями по математическому анализу, а также курсовыми и дипломными работами студентов математиков. Доц. Э.Реймерс уделял также много внимания методическим проблемам преподавания математики в университете. Он написал ряд учебно-методических пособий по математическому анализу [40,41] и выступал на учебно-методических совещаниях и конференциях [35].

Научные исследования Э.Реймерс начал с изучения проблемы суммируемости ряда-произведения Коши. При помощи теорем о среднем, он нашел точные условия для суммируемости и абсолютной суммируемости ряда-произведения, если один ряд-сомножитель абсолютно сходится [1,3]. Затем он доказал теоремы о среднем для двойных последовательностей и решил такую же проблему для умножения суммируемых двойных рядов [2, 4]. Эти результаты составляют основную часть его кандидатской диссертации [5].

Затем Э.Реймерс начал свои исследования по общей теории тауберовых теорем. Пусть A - треугольный матричный метод суммирования. Пользуясь своим методом он дал точные, а также эффективные достаточные условия для того, чтобы A-суммируемая последовательность сходилась или была бы суммируема каким-нибудь другим методом [9]. Условия сходимости обобщаются им и на нетреугольные матричные методы суммирования [23].

В работе [26] Э.Реймерс ввел так называемые мультипликаторные методы суммирования, при помощи которых также доказываются различные условия для сходимости А-суммируемой последовательности. В добавок этому ему удалось найти такие тауберовы условия для сходимости, которые зависят от рассматриваемой последовательности [28].

В работах [26,27,31] Э.Реймерс рассматривает более общую проблему, чем тауберова проблема, а именно проблему эквивалентности последовательности и ее А-преобразованной последовательности. Он доказал точные, а также эффективные достаточные условия для эквивалентности этих последовательностей. Из полученных результатов как частные случаи вытекают рассматриваемые теоремы тауберова типа.

Метод доказательства теорем эквивалентности распространяется и на двойные последовательности, и опять как частные случаи из полученных результатов эквивалентности вытекают теоремы тауберова типа для различных сходимостей двойных суммируемых последовательностей [42].

В работах [10,12,13] Э.Реймерс ввел так называемые континуальные методы суммирования, которые являются обобщениями матричных методов суммирования. Выражая оригинальным способом измеримые функции через числовые последовательности, он показал, что континуальные методы суммирования могут содержать в себе как частный случай интеграл Лебега.

Из свойств континуальных методов суммирования следует указать на следующее. Как известно регулярный матричный метод суммирования не может суммировать все ограниченные последовательности. Однако среди континуальных регулярных методов суммирования имеются и такие, которые суммируют все ограниченные последовательности. Эти результаты по континуальным методам суммирования составляют основную часть его докторской диссертации [16].

Вместе со всеми математиками Эстонии поздравляем доцента Эльмара Реймерса с юбилеем и желаем ему новых творческих успехов.

Э.Юримяэ, Х.Тюрнпу

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ Э Реймерса

1. Теорема о среднем значении для абсолютного суммирования // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1956, - Вып. 42, - с.113-134.
2. Теоремы о среднем значении для двойных рядов // Уч.зап. Тартуск. ун-та, - 1958. - Вып. 62, - с. 60-79.
3. Теорема о среднем значении и умножение суммируемых рядов // Докл. АН СССР. - 1958, - т. 120, - с. 1196-1199.
4. Теоремы о среднем значении в теории двойных рядов. Кандид. диссерт. ТГУ. - Тарту, 1958. - 74 с.
5. Теоремы о среднем значении и умножение суммируемых двойных рядов // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1959, - Вып.73, - с. 50-83.
6. Теоремы о среднем значении в теории двойных рядов. автореферат диссерт. - Тарту: ТГУ, 1958, - 16 с.
7. Уравнения математической физики (на эст. языке) - Тарту: ТГУ, 1960, - 110 с.
8. Сходимость по отрезкам и умножение суммируемых рядов // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1961, - Вып. 102, - с. 29-42.
9. Теоремы тауберова типа для матричных методов суммирования//Уч.зап.Тартуск.ун-та. - 1961, - Вып. 102, - с.43-51.
10. Новые общие методы суммирования // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1962, - Вып. 129, - с. 119-154.
11. К пятидесятилетию со дня рождения проф. Г.Кангро // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1964, - Вып. 150, - с.3-11. (сов. С.Барон, Т.Сырмус, Э.Юримяэ).
12. Континуальные методы суммирования и применения в теории функции // Тезисы ЭСМ. - Москва, 1966, 4. - с. 76-77.
13. Континуальные методы суммирования // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1967, - Вып. 206, - с. 50-89.
14. Практикум по математическому анализу I (на эст. языке) - Тарту: ТГУ, 1967, - 250 с. Переиздан 1970,1974,1979, 1983. (сов. С.Барон,Э Юримяэ,Т.Сырмус,М.Тыннов).
15. Совместность s-сходимости // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1968, - Вып. 220, с. 131-135.
16. Континуальные методы суммирования. Докт. диссерт. ТГУ. - Тарту, 1969. - 128 с.
17. Представление функций числовыми последовательностями // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1971, - Вып. 281, - с. 129-139.

18. Практикум по математическому анализу II (на эст. языке). - Тарту: ТГУ, 1972, - 264 с. Переиздан 1978, 1983. (сов. С.Барон,Э.Юримяэ).

19. Шестидесятилетие члена-кореспондента АН ЭССР Гуннара Кангро (на эст. и рус. языках) // Изв. АН ЭССР. - 1973, - Вып. 22, - с. 455-457. (сов. С.Барон).

20. К шестидесятилетию проф. Г.Кангро // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1974, - Вып. 342, - с. 3-12. (сов. С.Барон).

21. Практикум по математическому анализу III часть I (на эст. языке). - Тарту: ТГУ, 1974, - 216 с. Переиздан 1983. (сов. С.Барон).

22. Гуннар Фромхолдович Кангро // Успехи мат. наук. - 1975, т. XXX, - с. 273-278. (сов. С.Барон).

23. К шестидесятилетию Я.Габовича // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1975, - Вып. 355, - с. 3-6.(сов. С.Барон, Ю.Каазик).

24. Практикум по математическому анализу III часть 2 (на эст. языке). - Тарту: ТГУ, 1976, - 276 с. Переиздан 1983. (сов. С.Барон).

25. Памяти Гуннара Фромхолдовича Кангро // Успехи мат.наук. - 1977, - т. XXXII, - с. 151-152. (сов. С.Барон).

26. Памяти проф. Гуннара Кангро // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1977, - Вып. 430, - с. 3-5. (Сов. С.Барон).

27. Тауберовы теоремы для числовых рядов // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1977, - Вып. 430, - с. 51-57.

28. На помощь к оформлению математических работ (на эст. языке). - Тарту: ТГУ, 1978, - 22 с. (сов. С.Барон, Э. Тамме).

29. К юбилею Я.Габовича. // Мат. я каас., 21. Тарту, 1978 с. 51. (сов. С.Барон).

30. Мультипликаторные методы суммирования и теоремы тауберова типа // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1981, - Вып. 504, - с. 85-89.

31. Эквивалентность последовательностей и тауберовы теоремы. // Тезисы конф. "Теор. и прикл. вопросы мат.", Тартуск. гос.ун-т. - Тарту, 1980, - с. 141-143.

32. Проблемы эквивалентности последовательностей и тауберовы теоремы I // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1982, - Вып. 596, - с. 15-23.

33. Тауберовы коэффициенты, зависящие от последовательности, для метода Чезаро. 350 лет мат. в Тарт.ун-та //

Тезисы докл. - Тарту, 1982, - с. 17-19.
34. Теоремы о среднем, зависящие от последовательности // Тезисы докл. конф. "Методы алгебры и анализа". - Тарту, 1983, - с. 53-55.
35. О факторах, способствующих самостоятельной работе студентов и тормозящих её. Совместно с Л.Пусманн. Зональное совещание-семинар зав. каф. и ведущих преподавателей мат-ки ВУЗов Белорусской, Латвийской, Литовской, ЭстССР и Калин. обл. // Тезисы докл. - Вильнюс, 1983, с. 201-203.
36. Проблема эквивалентности последовательностей и тауберовы теоремы. II // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1984, - Вып. 661, - с. 64-75.
37. Руководство для написания курсовых и дипломных работ на математическом факультете. - Тарту: ТГУ, 1984, - 21 с. (на эст. языке). Переиздан 1988.
38. Доцент Тамара Сырмус 60 // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1987, - Вып. 770, - с. 3-6. (сов. А. Тали и Э.Юримяэ).
39. К шестидесятилетию со дня рождения доцента Т.Сырмус // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1987, - Вып. 770, - с. 7-9. (Сов. Э.Юримяэ).
40. Практикум по математическому анализу. I - Таллин: Валгус, 1988, - 231 с.
41. Практикум по математическому анализу II. - Таллин: Валгус, 1988, - 255 с.
42. Эквивалентность двойных последовательностей и тауберовы теоремы. I // Уч. зап. Тартуск. ун-та. - 1989, - Вып. 846, - с. 166-171.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989, 846, II-24

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ С НЕПУСТЫМ СПЕКТРОМ

М.Абель

Лаборатория прикладной математики

Пусть A - топологическая алгебра (т.е. линейное топологическое пространство над $\mathbb{C}$, которое является ассоциативной алгеброй и в которой умножение элементов (как билинейное отображение $A\times A$ в A) раздельно непрерывно), $\mathcal{I}nv\,A$ - множество всех обратимых элементов в A, e_A - единица алгебры A, θ_A - нулевой элемент алгебры A и

$$sp_A(a) = \{\lambda\in\mathbb{C} : a-\lambda e_A \notin \mathcal{I}nv\,A\}$$

- спектр элемента $a\in A$.

Топологическая алгебра A называется

а) алгеброй Валбрука, если множество $\mathcal{I}nv\,A$ открыто в A и обращение $a \to a^{-1}$ непрерывно;

б) локально псевдовыпуклой алгеброй (локально выпуклой алгеброй), если ее топология определена системой $\{p_\alpha : \alpha\in\mathcal{A}\}$ непрерывных k_α-однородных полунорм при $0<k_\alpha\leqslant 1$ для каждого $\alpha\in\mathcal{A}$ (соответственно, непрерывных полунорм);

в) локально m-псевдовыпуклой алгеброй (локально m-выпуклой алгеброй), если она локально псевдовыпукла (соответственно, локально выпукла) и каждая полунорма p_α удовлетворяет условию $p_\alpha(ab)\leqslant p_\alpha(a)p_\alpha(b)$ для каждых $a,b\in A$;

г) локально p-псевдовыпуклой алгеброй (локально p-(m-псевдовыпуклой) алгеброй), если она локально псевдовыпукла, (соответственно, локально m-псевдовыпукла) и $k_\alpha=p$ для каждого $\alpha\in\mathcal{A}$.

д) равномерно поглощенно псевдовыпуклой алгеброй (равномерно поглощенно выпуклой алгеброй), если она локально псевдовыпукла (соответственно, локально выпукла) и для каждого $a\in A$ найдутся такие положительные числа $M(a)$ и $N(a)$, что $p_\alpha(ab)\leqslant M(a)p_\alpha(b)$ и $p_\alpha(ba)\leqslant N(a)\,p_\alpha(b)$ для всех $b\in A$ независимо от полунормы p_α;

2 *

е) локально ограниченной алгеброй (нормированной алгеброй), если ее топология определена непрерывной p-однородной нормой при $0<p\leq 1$ (соответственно, непрерывной нормой);

ё) p-банаховой алгеброй (банаховой алгеброй), если она локально ограничена, отделима и полна (соответственно, нормирована и полна).

Известно (см. [11], с. 57), что спектр каждого элемента топологической $\mathbb{C}$-алгебры A непуст, если

а) обращение элементов в алгебре A непрерывно

и

б) для каждого элемента $a\in A\setminus\{\theta_A\}$ найдется такой непрерывный линейный функционал φ на A, что $\varphi(a)\neq 0$.

Так как отделимые локально выпуклые пространства обладают свойством б) (см., например, [5], с. 172), то спектр каждого элемента непуст в тех отделимых локально выпуклых $\mathbb{C}$-алгебрах с единицей, в которые обладают свойством а). Кроме того (см. [6], с. 410–411), спектр каждого элемента локально выпуклой $\mathbb{C}$-алгебры A с единицей непуст, если она обладает свойством

(α) для каждого $a\in A$ найдется такое число $\lambda_a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, что последовательность $((a/\lambda)^n)$ сходится к нулю в алгебре A.

Хорошо известно, что обращение элементов в отделимых локально m-выпуклых алгебрах непрерывно (см. [11], с. 52, [12], с. 10, или [18], с. 94) и то, что каждая равномерно поглощенна выпуклая алгебра обладает свойством (α) (см. [13] с. 851). Поэтому в таких $\mathbb{C}$-алгебрах с единицей спектр каждого элемента непуст. В дополнение к сказанному выше, p-банаховы алгебры обладают свойством а) (см., например, [17] с. 10, и [18], с. 18), но не все обладают свойством б). Несмотря на это спектр каждого элемента непуст и в p-банаховых $\mathbb{C}$-алгебрах с единицей (см. [8], с. 201). Кроме того, спектр каждого элемента непуст и в отделимых локально псевдовыпуклых $\mathbb{C}$-алгебрах Валбрука с единицей и с непрерывным умножением элементов (см. [19], с. 195, и [16], с. 152-153). При этом найдутся такие топологические $\mathbb{C}$-алгебры, которые содержат элементы с пустым спектром (см., например, [19], с. 141-148, [9], с. 75, или [17], с. 44).

В данной статье показывается непустота спектра каждого элемента в отделимых локально псевдовыпуклых $\mathbb{C}$-алгебрах с единицей, обладающих свойством (α), в отделимых локально псевдовыпуклых $\mathbb{C}$-алгебрах Валбрука с единицей и в полных отделимых p-(m-псевдовыпуклых) $\mathbb{C}$-алгебрах с единицей.

§I. Резольвента элементов в топологических алгебрах

Пусть $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$, $\overline{\mathbb{N}}=\{0\}\cup\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_n=\{1,2,\ldots,n\}$ и $\overline{\mathbb{N}}_n=\{0\}\cup\mathbb{N}_n$ для каждого $n\in\mathbb{N}$. Далее, пусть $\mathcal{U}$ – замкнутое подмножество в $\mathbb{C}$, $\mathcal{V}_{\mathcal{U}}=\mathbb{C}\setminus\mathcal{U}$, $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, Y – линейное топологическое пространство над $\mathbb{C}$ и $C(X,Y)$ – множество всех непрерывных Y-значных функций на топологическом пространстве X.

Говорят, что функция $f\in C(\mathcal{V}_{\mathcal{U}},Y)$ <u>принадлежит классу $C_N(\mathbb{C}^*\setminus\mathcal{U},Y)$</u>, если

1) для каждого $p\in\mathbb{N}_N$ найдутся функция $D_p(f)\in C(\mathcal{V}_{\mathcal{U}},Y)$ и для каждого $p\in\overline{\mathbb{N}}_N$ функции $g_N^p(f)\in C(\mathcal{V}_{\mathcal{U}}\times\mathcal{V}_{\mathcal{U}},Y)$, удовлетворяющие условию $g_N^p(f)(\lambda,\lambda)=\Theta_Y$ для каждого $\lambda\in\mathcal{V}_{\mathcal{U}}$, такие, что

$$D_p(f)(\mu)=\sum_{k=0}^{N-p}D_{p+k}(f)(\lambda)\frac{(\mu-\lambda)^k}{k!}+(\mu-\lambda)^{N-p}g_N^p(f)(\lambda,\mu)$$

для каждого $\mu\in\mathcal{V}_{\mathcal{U}}$ при каждом фиксированном $\lambda\in\mathcal{V}_{\mathcal{U}}$ (здесь $D_0(f)=f$);

2) в пространстве Y существует предел $\lim\limits_{\lambda\to 0}f(1/\lambda)$;

3) функция g, определенная в некоторой окрестности нуля $\mathcal{O}$ поля $\mathbb{C}$ равенством

$$g(\lambda)=\begin{cases}f(1/\lambda), & \text{если } \lambda\neq 0,\\ \lim\limits_{\lambda\to 0}f(1/\lambda), & \text{если } \lambda=0,\end{cases}$$

определяет для каждого $p\in\mathbb{N}_N$ функцию $D_p(g)$ (которая непрерывна в точке $\lambda=0$) и для каждого $p\in\overline{\mathbb{N}}_N$ – функцию $h_N^p(g)$ (которая непрерывна в точке $\lambda=0$ и удовлетворяет условию $h_N^p(g)(0)=\Theta_Y$) таике, что

$$D_p(g)(\lambda)=\sum_{k=0}^{N-p}D_{p+n}(g)(0)\frac{\lambda^k}{k!}+\lambda^{N-p}h_N^p(g)(\lambda)$$

для всех $\lambda\in\mathcal{O}$ (здесь $D_0(g)=g$).

Кроме того, говорят, что функция $f\in C(\mathcal{V}_{\mathcal{U}},Y)$ <u>принадлежит классу $\mathcal{O}(\mathbb{C}^*\setminus\mathcal{U},Y)$</u>, если

I) $f\in\bigcap\limits_{N\in\mathbb{N}}C_N(\mathbb{C}^*\setminus\mathcal{U},Y)$

2) $\left(\frac{\partial}{\partial \bar\lambda} f\right)(\lambda) = \theta_y$ на $\mathcal{U}_u$ и $\left(\frac{\partial}{\partial \bar\lambda} g\right)(0) = \theta_y$

(здесь $\frac{\partial}{\partial \bar\lambda} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{Re}\lambda} + i\frac{\partial}{\partial \mathrm{Im}\lambda}$).

Чтобы показать непустоту спектра элементов в топологических алгебрах введем следующие обозначения. Пусть $\tilde A$ обозначает пополнение отделимой топологической алгебры A (как отделимое линейное топологическое пространство), τ_A - взаимно непрерывную линейную инъекцию A на всюду плотное подмножество в $\tilde A$, определенную пополнением алгебры A, и R_a - резолвенту элемента $a \in A$, т.е. отображение R_a, которое на $\mathbb{C} \setminus sp_A(a)$ определяется равенством

$$R_a(\lambda) = (a - \lambda e_A)^{-1}.$$

Во первых докажем

Предложение. Если выполнено одно из следующих условий:

а) A является отделимой локально псевдовыпуклой $\mathbb{C}$-алгеброй с единицей, которая обладает свойством (α)
или

б) A является отделимой алгеброй Валбрука с единицей, то $\tau_A \circ R_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^* \setminus sp_A(a), \tilde A)$ в случае а) для тех $a \in A$, при котором $sp_A(a)$ является замкнутым ограниченным подмножеством в $\mathbb{C}$, и в случае б) для всех $a \in A$.

Доказательство. а) Пусть A - отделимая локально псевдовыпуклая $\mathbb{C}$-алгебра с единицей, топология которой определена системой $\{p_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ непрерывных k_α-однородных полунорм при $0 < k_\alpha \leq 1$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$. Поскольку каждая полунорма p_α равностепенно непрерывна на A, то $p_\alpha \circ \tau_A^{-1}$ имеет единственным образом определенное продолжение $\tilde p_\alpha$ на $\tilde A$, которое удовлетворяет условию $\tilde p_\alpha(\tau_A(a)) = p_\alpha(a)$ для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ (см., например, [10], с. 129). Легко заметить, что каждое продолжение $\tilde p_\alpha$ является k_α-однородной полунормой на $\tilde A$. Поэтому система $\{\tilde p_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ определяет на $\tilde A$ отделимую локально псевдовыпуклую топологию. Поскольку последовательность $(\tau_A(b(a\delta_a^{-1})^n))$ сходится к нулю в пространстве $\tilde A$ по условию (α) для каждых фиксированных элементов $a, b \in A$, то последовательность $(\tilde p_\alpha[\tau_A(b(a\delta_a^{-1})^n)])$ сходится к нулю при любом $\alpha \in \mathfrak{A}$. Поэтому для каждых фиксированных $a, b \in A$ и $\alpha \in \mathfrak{A}$ существует такое число $M_\alpha(a, b) > 0$, что

$$\tilde p_\alpha[\tau_A(ba^n)] \leq M_\alpha(a, b)|\delta_a|^{nk_\alpha} \qquad (1)$$

при всех $n \in \mathbb{N}$.

Дальнейшую часть доказательства разделим на две части.

I) Во-первых покажем, что $\tau_A \circ R_a \in C_N(\mathbb{C}^*\setminus sp_A(a), \tilde{A})$ для каждых фиксированных $a \in A$ и $N \in \mathbb{N}$. Для этого зафиксируем $a \in A$ и $N \in \mathbb{N}$, положим $\mathcal{U}_a = \mathbb{C}\setminus sp_A(a)$ и предположим, что a имеет замкнутый спектр. Тогда $\mathcal{U}_a$ открыто в $\mathbb{C}$. Пусть далее $\lambda \in \mathcal{U}_a$, $a(\lambda) = R_a(\lambda)$,

$$\mathcal{O}_\lambda = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| < 1/(2|\delta_\lambda|)\} \cap \mathcal{U}_a$$

(где $\delta_\lambda = \delta_{a(\lambda)}$ – число, определенное условием (α)) и

$$D_p(\tau_A \circ R_a)(\mu) = p!\,\tau_A(a(\mu)^{p+1})$$

на $\mathcal{U}_a$ для каждого $p \in \mathbb{N}_N$. Тогда $D_0(\tau_A \circ R_a) = \tau_A \circ R_a$ и

$$p!\,\tau_A[a(\mu)^{p+1}a(\lambda)^\ell] = \sum_{k=p}^{N} \frac{k!}{(k-p)!}(\mu-\lambda)^{k-p}\tau_A(a(\lambda)^{k+\ell+1}) +$$
$$+ (\mu-\lambda)^{N-p} g^p_{N,\ell}(\lambda,\mu) \tag{2}$$

для всех $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_N$ и $\mu \in \mathcal{U}_a$, где

$$g^p_{N,\ell}(\lambda,\mu) = \sum_{k=0}^{p} \chi_N(k,p)(\mu-\lambda)^{k+1}\tau_A[a(\mu)^{k+1}a(\lambda)^{N+\ell+1}]$$

и

$$\chi_N(k,p) = \frac{p!\,(N+1)!}{(p-k)!\,(N+k+1-p)!}.$$

Поэтому

$$D_p(\tau_A \circ R_a)(\mu) = \sum_{k=0}^{N-p} D_{p+k}(\tau_A \circ R_a)(\lambda)\frac{(\mu-\lambda)^k}{k!} +$$
$$+ (\mu-\lambda)^{N-p} g^p_N(\lambda,\mu) \tag{3}$$

для всех $\mu \in \mathcal{U}_a$ и $p \in \mathbb{N}_N$, где $g^p_N = g^p_{N,0}$.

Далее покажем, что отображение $D_p(\tau_A \circ R_a)$ непрерывно на $\mathcal{U}_a$, а отображение g^p_N непрерывно на $\mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_a$ для каждого $p \in \mathbb{N}$. Для этого зафиксируем $p \in \mathbb{N}_N$, $\ell \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathfrak{A}$ и оценим величину $(\mu-\lambda)^{N-p}\tilde{p}_\alpha(g^p_{N,\ell}(\lambda,\mu))$. Поскольку (по условию (I)) для каждых фиксированных $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\nu \in \mathbb{N}_{N-p}$ и $\mu \in \mathcal{O}_\lambda$ существует число $M_\alpha(\nu,\lambda,\mu) > 0$ такое, что

$$S_\alpha(\nu,s,\mu,\lambda) = \tilde{p}_\alpha[\tau_A(a(\mu)^{\nu+1}a(\lambda)^s] \leq M_\alpha(\nu,\lambda,\mu)|\delta_\lambda|^{sk_\alpha}$$

при всех $s \in \mathbb{N}$, то

$$\widetilde{p}_\alpha[(\mu-\lambda)^{N-p} g^p_{N,\ell}(\lambda,\mu)] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{p} \varkappa_N(\nu,p)^{k_\alpha} |\mu-\lambda|^{k_\alpha(N+1+k-p)} S_\alpha(\nu, N+\ell+1,\mu,\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant |\delta_\lambda|^{k_\alpha \ell} \sum_{\nu=0}^{p} (M_\alpha(\nu,\lambda,\mu) \frac{u_N(\alpha,\nu,p)}{(2|\delta_\lambda|)^{k_\alpha(\nu-p)}}$$

при $\mu \in \mathcal{O}_\lambda$, где

$$u_N(\alpha,\nu,p) = (\varkappa_N(\nu,p)/2^{N+1})^{k_\alpha} \qquad (4)$$

стремится к нулю при $N \to \infty$ для фиксированных α, ν и p. Поэтому

$$\lim_{N\to\infty} \widetilde{p}_\alpha[(\mu-\lambda)^{N-p} g^p_{N,\ell}(\lambda,\mu)] = 0 \qquad (5)$$

для всех $\mu \in \mathcal{O}_\lambda$ при фиксированных $\alpha \in \mathcal{O}\!\!\iota$, $\lambda \in \mathcal{U}_\alpha$, $\ell \in \overline{\mathbb{N}}$ и $p \in \overline{\mathbb{N}}_N$. Следовательно, из равенств (2) и (5) следует

$$\tau_A[a(\mu)^{p+1} a(\lambda)^\ell] = \sum_{k=p}^{\infty} \frac{k!}{p!(k-p)!} (\mu-\lambda)^{k-p} \tau_A(a(\lambda)^{k+\ell+1}) \qquad (6)$$

для всех $\mu \in \mathcal{O}_\lambda$ при фиксированных $\lambda \in \mathcal{U}_\alpha$, $\ell \in \overline{\mathbb{N}}$ и $p \in \overline{\mathbb{N}}_N$. В силу этого,

$$D_p(\tau_A \circ R_a)(\mu) - D_p(\tau_A \circ R_a)(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+p)!}{k!} (\mu-\lambda)^k \tau_A[a(\lambda)^{k+p+1}]$$

для всех $\mu \in \mathcal{O}_\lambda$ и $p \in \overline{\mathbb{N}}_N$ при фиксированном $\lambda \in \mathcal{U}_\alpha$. Поскольку (по условию (I)) для каждых фиксированных $\alpha \in \mathcal{O}\!\!\iota$ и $\lambda \in \mathcal{U}_\alpha$ существует число $M_\alpha(\lambda) > 0$ такое, что

$$\widetilde{p}_\alpha(\tau_A[a(\lambda)^t]) \leqslant M_\alpha(\lambda) |\delta_\lambda|^{k_\alpha t}$$

при всех $t \in \mathbb{N}$, то

$$\widetilde{p}_\alpha[D_p(\tau_A \circ R_a)(\mu) - D_p(\tau_A \circ R_a)(\lambda)] \leqslant K_{\alpha,p}(\lambda) |\mu-\lambda|^{k_\alpha}$$

при $\mu \in \mathcal{O}_\lambda$ для всех фиксированных $\alpha \in \mathcal{O}\!\!\iota$, $\lambda \in \mathcal{U}_\alpha$ и $p \in \mathbb{N}_N$, где

$$K_{\alpha,p}(\lambda) = 2^{k_\alpha} M_\alpha(\lambda) |\delta_\lambda|^{k_\alpha(p+2)} V(p,\alpha)$$

и

$$V(p,\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k+p)!}{k!\, 2^k}\right)^{k_\alpha} < \infty \qquad (7)$$

Поэтому

$$\lim_{\mu\to\lambda} D_p(\tau_A\circ R_a)(\mu) = D_p(\tau_A\circ R_a)(\lambda)$$

для каждых $\lambda\in\mathcal{U}_a$ и $p\in\overline{\mathbb{N}}_N$. Таким образом непрерывность отображения $D_p(\tau_A\circ R_a)$ на $\mathcal{U}_a$ для каждого $p\in\overline{\mathbb{N}}_N$ показана. Остается показать еще непрерывность отображения g_N^p на $\mathcal{U}_a\times\mathcal{U}_a$ для каждого $p\in\mathbb{N}_N$. Так как

$$g_N^p(\lambda,\mu) = [D_p(\tau_A\circ R_a)(\mu) - \sum_{k=0}^{N-p} D_{p+k}(\tau_A\circ R_a)(\lambda)\frac{(\mu-\lambda)^k}{k!}](\mu-\lambda)^{p-N} \qquad (8)$$

при $\lambda,\mu\in\mathcal{U}_a$ и $\mu\neq\lambda$, то из непрерывности отображений $D_p(\tau_A\circ R_a)$ на $\mathcal{U}_a$ для каждого $p\in\mathbb{N}_N$ следует непрерывночть отображения g_N^p на $(\mathcal{U}_a\times\mathcal{U}_a)\setminus\{(\lambda,\lambda):\lambda\in\mathcal{U}_a\}$ для каждого $p\in\mathbb{N}_N$. Далее, аналогично изложенному выше,

$$\hat{p}_\alpha(g_N^p(\lambda,\mu))\leqslant S_\alpha(p,\lambda)|\mu-\lambda|^{k_\alpha}$$

(по равенствам (6) и (7)) для всех $\alpha\in\mathfrak{A}$, $p\in\overline{\mathbb{N}}_N$ и $\mu\in\mathcal{O}_\lambda$ при фиксированном $\lambda\in\mathcal{U}_a$, где

$$S_\alpha(p,\lambda) = M_\alpha(\lambda)|\delta_\lambda|^{k_\alpha(N+2)}\sum_{k=0}^{p}\chi_N(k,p)^{k_\alpha}V(k,\alpha).$$

Поэтому

$$\lim_{\mu\to\lambda} g_N^p(\lambda,\mu) = \theta_A \qquad (9)$$

для всех $\lambda\in\mathcal{U}_a$ и $p\in\overline{\mathbb{N}}_N$. Учитывая это и сказанное выше, отображения g_N^p непрерывны на $\mathcal{U}_a\times\mathcal{U}_a$ и удовлетворяют условию $g_N^p(\lambda,\lambda)=\theta_A$ для каждого $p\in\overline{\mathbb{N}}_N$ и $\lambda\in\mathcal{U}_a$.

2) Пусть опять $a\in A$ и спектр $sp_A(a)$ является ограниченным подмножеством в $\mathbb{C}$. Тогда существует число $M_a>0$ такое, что $sp_A(a)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leqslant M_a\}$. Так как $R_a(1/\lambda) = -\lambda(e_A-\lambda a)^{-1}$ на $\mathcal{O}_a=\{\lambda\in\mathbb{C}: 0<|\lambda|<1/M_a\}$ и

$$(e_A-\lambda a)^{-1} = \sum_{k=0}^{N}(\lambda a)^k + (e_A-\lambda a)^{-1}(\lambda a)^{N+1}$$

для всех $\lambda\in\mathcal{O}_a\cup\{0\}$ и $N\in\mathbb{N}$, то

$$\tau_A[(e_A-\lambda a)^{-1}] = \sum_{k=0}^{N}\lambda^k\tau_A(a^k) + \lambda^{N+1}\tau_A[(e_A-\lambda a)^{-1}a^{N+1}] \qquad (10)$$

для всех таких λ и N.

Пусть далее

$$\mathcal{O}'_a = \{\lambda\in\mathbb{C}: |\lambda|<\min[1/(2|\delta_a|), 1/M_a]\},$$

где δ_a - число, определенное условием (I). Тогда для каждых фиксированных $\lambda\in\mathcal{O}'_a$ и $\alpha\in\mathfrak{A}$ существует (по условию (I)) число $N_\alpha(\lambda)>0$ такое, что

$$\tilde{p}_\alpha(\lambda^{N+1}\tau_A[(e_A-\lambda a)^{-1}a^{N+1}]) \leq N_\alpha(\lambda)a^{-K_\alpha(N+1)}$$

для всех $N\in\mathbb{N}$. Поэтому

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{p}_\alpha\left[\tau_A((e_A-\lambda a)^{-1}) - \sum_{k=0}^{N}\lambda^k\tau_A(a^k)\right]=0$$

по равенству (I0) при рассматриваемых λ и α. Следовательно,

$$\tau_A[(e_A-\lambda a)^{-1}] = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\tau_A(a^k)$$

при всех $\lambda\in\mathcal{O}'_a$. Учитывая это и условие (I), множество

$$\{\tilde{p}_\alpha(\tau_A[(e_A-\lambda a)^{-1}]) : \lambda\in\mathcal{O}'_a\}$$

является ограниченным для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$. Поэтому

$$\lim_{\lambda\to 0}\tau_A\circ R_a(1/\lambda) = -\lim_{\lambda\to 0}\lambda\tau_A[(e_A-\lambda a)^{-1}] = \theta_{\tilde{A}}. \qquad \text{(II)}$$

Пусть теперь

$$g_a(\lambda) = \begin{cases} \tau_A\circ R_a(1/\lambda) & \text{при } \lambda\neq 0, \\ \theta_{\tilde{A}} & \text{при } \lambda=0 \end{cases} \qquad \text{(I2)}$$

на $\mathcal{O}'_a$, $D_0(g_a)=g_a$ и $D_p(g_a)(\lambda)=-p!\tau_A[(e_A-\lambda a)^{-(p+1)}a^{p-1}]$ на $\mathcal{O}'_a$ при всех $p\in\mathbb{N}$. Тогда $D_p(g_a)(0)=-p!\tau_A(a^{p-1})$ при $p\in\mathbb{N}$ и

$$p!(e_A-\lambda a)^{-(p+1)} = \sum_{k=0}^{N-p}\frac{(p+k)!}{k!}(a\lambda)^k + \lambda^{N-p}L_{N,p}(\lambda) \qquad \text{(I3)}$$

при всех $p\in\overline{\mathbb{N}}_N$ и $\lambda\in\mathcal{O}'_a$, где

$$L_{N,p}(\lambda) = \sum_{k=0}^{p}\chi_N(k,p)\lambda^{k+1}(e_A-\lambda a)^{-(k+1)}a^{N+k+1-p}.$$

Поэтому

$$D_p(g_a)(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-p}D_{p+k}(g_a)(0)\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda^{N-p}h_N^p(\lambda) \qquad \text{(I4)}$$

для всех $p\in\overline{\mathbb{N}}_N$ и $\lambda\in\mathcal{O}'_a$, где

$$h_N^p(\lambda) = -\sum_{k=0}^{p}\chi_N(k,p)\lambda^{k+1}\tau_A[(e_A-\lambda a)^{-(k+1)}a^{N+k}].$$

Аналогично тому как и выше, для каждых фиксированных $\alpha\in\mathfrak{A}$, $\lambda\in\mathcal{O}_a$ и $k\in\mathbb{N}$ существует (по условию (I)) число $M_\alpha(k,\lambda)>0$ такое, что

$$\tilde{p}_\alpha(\tau_A[(e_A-\lambda a)^{-(k+1)}a^s]) \leq M_\alpha(k,\lambda)|\delta_a|^{K_\alpha s}$$

при всех $s\in\mathbb{N}$, в силу чего

$$\tilde{p}_\alpha(\lambda^{N-p}\tau_A[L_{N,p}(\lambda)a^\ell])\leq|\delta_\alpha|^{K_\alpha \ell}\sum_{k=0}^{p}M_\alpha(k,\lambda)u_N(\alpha,k,p)2^{K_\alpha(p-k)}$$

для всех фиксированных $\alpha\in\mathfrak{A}$, $\ell\in\mathbb{N}$, $p\in\overline{\mathbb{N}}_N$ и $\lambda\in O'_\alpha$, где числа $u_N(\alpha,k,p)$ (определенные равенством (4)) стремятся к нулю при $N\to\infty$. Таким образом,

$$\lim_{N\to\infty}\tilde{p}_\alpha(\lambda^{N-p}\tau_A[L_{N,p}(\lambda)a^\ell])=0$$

для всех рассматриваемых фиксированных α, ℓ, p и λ. Теперь, учитывая это и равенство (I3), имеем

$$\tau_A[(e_A-\lambda a)^{-(p+1)}a^\ell]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(p+k)!}{p!\,k!}\lambda^k\tau_A(a^{k+\ell}) \qquad (I5)$$

для всех фиксированных $p\in\overline{\mathbb{N}}_N$, $\ell\in\overline{\mathbb{N}}$ и $\lambda\in O'_\alpha$. Опять, аналогично изложенному выше, для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$ существует $M_\alpha>0$ такое, что

$$\tilde{p}_\alpha(\tau_A(a^t))\leq M_\alpha|\delta_\alpha|^{K_\alpha t}$$

при всех $t\in\mathbb{N}$. Поэтому (по равентсву (I5))

$$\tilde{p}_\alpha(D_p(g_\alpha)(\lambda)-D_p(g_\alpha)(0))\leq R_{\alpha,p}|\lambda|^{K_\alpha}$$

для каждых $\lambda\in O'_\alpha$, $\alpha\in\mathfrak{A}$ и $p\in\mathbb{N}_N$, где

$$R_{\alpha,p}=2^{K_\alpha}M_\alpha|\delta_\alpha|^{K_\alpha p}V(p,\alpha)$$

и $V(p,\alpha)$ – число, определенное равенством (7). Следовательно, отображения $D_p(g_\alpha)$ являются непрерывными в точке $\lambda=0$ для каждого $p\in\mathbb{N}_N$. Опять по равенству (I5) легко заметить, что

$$\tilde{p}_\alpha(h_N^p(\lambda))\leq L_{\alpha,p,N}|\lambda|^{K_\alpha}$$

при всех фиксированных $\alpha\in\mathfrak{A}$, $p\in\overline{\mathbb{N}}_N$ и $\lambda\in O'_\alpha$, где

$$L_{\alpha,p,N}=M_\alpha|\delta_\alpha|^{K_\alpha N}\sum_{k=0}^{p}(\chi_N(k,p)/2^k)^{K_\alpha}.$$

Поэтому

$$\lim_{\lambda\to 0}h_N^p(\lambda)=\theta_{\tilde{A}}. \qquad (I6)$$

для каждых фиксированных $N\in\mathbb{N}$ и $p\in\overline{\mathbb{N}}_N$. Таким образом отображения h_N^p непрерывны в точке $\lambda=0$ и $h_N^p(\theta)=\theta_{\tilde{A}}$ для каждого $p\in\overline{\mathbb{N}}_N$. Следовательно, $\tau_A\circ R_a\in C_N(\mathbb{C}^*\setminus sp_A(a),\tilde{A})$ для каждых фиксированных $a\in A$ и $N\in\mathbb{N}$. В силу этого при всех $a\in A$ справедливо

$$\tau_A\circ R_a\in\bigcap_{N\in\mathbb{N}}C_N(\mathbb{C}^*\setminus sp_A(a),\tilde{A}). \qquad (I7)$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \operatorname{Re}\lambda}(\tau_A \circ R_a)(\lambda) = \tau_A[a(\lambda)^2],$$

$$\frac{\partial}{\partial \operatorname{Im}\lambda}(\tau_A \circ R_a)(\lambda) = i\tau_A[a(\lambda)^2],$$

$$\frac{\partial}{\partial \operatorname{Re}\lambda} g_a(0) = -\tau_A(e_A)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \operatorname{Im}\lambda} g_a(0) = -i\tau_A(e_A),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}}(\tau_A \circ R_a)(\lambda) = \theta_{\hat{A}} \tag{I8}$$

на $\mathcal{U}_a$ и

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} g_a\right)(0) = \theta_{\hat{A}} \tag{I9}$$

для каждого фиксированного элемента $a \in A$. Учитывая все, что представлено выше, справедливо $\tau_A \circ R_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^* \setminus sp_A(a), \hat{A})$ при всех тех $a \in A$, для которых $sp_A(a)$ является замкнутым ограниченным подмножеством в $\mathbb{C}$.

б) Пусть теперь A - отделимая $\mathbb{C}$-алгебра Валбрука с единицей. Тогда множество $\operatorname{Inv} A$ открыто в A. Поэтому $sp_A(a)$ ограничено и замкнуто в $\mathbb{C}$ для каждого $a \in A$ (см. [7], с. 206-207). Если, в частности, алгебра A локально выпукла или равномерно поглощенно p-псевдовыпукла, то[I] она обладает свойст-

---

[I] Пусть A - отделимая локально выпуклая $\mathbb{C}$-алгебра Валбрука и $a \in A$. Тогда

$$\lim_{\lambda \to 0} R_a(1/\lambda) = -\lim_{\lambda \to 0} \lambda(e_A - \lambda a)^{-1} = \theta_A,$$

ибо обращение элементов в A непрерывно. Пусть $M_a > 0$ - число, удовлетворяющее условию $sp_A(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M_a\}$ (ввиду ограниченности спектра), $O_a = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda| < 1/M_a\}$, $g(\lambda) = R_a(1/\lambda)$ на O_a и $g(0) = \theta_A$. Поскольку A отделима и локально выпукла, ее топологическое сопряженное пространство A^* непусто (см., например, [5], с. I72). Учитывая это и сказанное выше, $\varphi \circ g$ является голоморфной функцией в $\mathcal{U} = O_a \cup \{0\}$ для каждого $\varphi \in A^*$, ее производные $(\varphi \circ g)^{(n)}(0) = -n!\,\varphi(a^{n-1})$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому ряд Тейлора функции $\varphi \circ g$ сходится в $\mathcal{U}$ для всех $\varphi \in A^*$. Значит, сходится и ряд $\sum \varphi((a\lambda)^n)$ для всех $\varphi \in A^*$ при фиксированном $\lambda = \lambda_0 \in O_a$, в силу чего последовательность $((a\lambda_0)^n)$ является слабо ограниченной. Как известно (см., например, [4], с. I67), слабо ограниченные и ограниченные подмножества в A совпадают. Поэтому последовательность $((a\lambda_0)^n)$ ограничена и в топологии алгебры A. Учитывая это, последовательность $((a/\mu)^n)$ сходится к нулю в алгебре A, если $|\mu| > |\lambda_0|^{-1}$.

Пусть теперь A - равномерно поглощенно p-псевдовыпуклая вом (α) и таким образом теорема доказана.

Приведем теперь доказательство теоремы для общего случая. Для этого используем непрерывность обращения элементов в алгебре A (см. [3], с. 204-205) и непрерывность отображений[2] ν_k с $k \in \mathbb{N}$, определенных на A равенством $\nu_k(a) = a^k$ для каждого $a \in A$. Как и выше в данном случае имеют место равенства (3), (8), (II), (I8) и (I9)$_a$ и в окрестности нуля $\mathcal{O}'_a$ также равенства (I2) и (I4). Поскольку

$$\lim_{\mu \to \lambda} \tau_A[a(\mu)^k a(\lambda)^l] = \tau_A(a(\lambda)^{k+l})$$

при $k, l \in \overline{\mathbb{N}}$ и $\lambda \in \mathcal{U}_a$ и

$$\lim_{\mu \to \lambda} \tau_A[(e_A - \lambda a)^{-k} a^l] = \tau_A(a^l)$$

при $k, l \in \overline{\mathbb{N}}$, то справедливы и равенство (9) для каждых $\lambda \in \mathcal{U}_a$ и $p \in \overline{N}_N$ и равенство (I6) для каждого $p \in \overline{N}_N$. Таким образом отображение $D_p(\tau_A \circ R_a)$ является непрерывным на $\mathcal{U}_a$, g^p_a – непрерывным на $\mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_a$ (см. равенство (8)), а $D_p(g_a)$ и $R^p_{N_a}$ – непрерывными в точке $\lambda = 0$ для всех $p \in \overline{N}_N$. В силу этого, $\tau_A \circ R_a \in C_N(\mathbb{C}^* \setminus sp_A(a), \tilde{A})$ для каждых $a \in A$ и $N \in \mathbb{N}$ и справедливо равенство (I7). Следовательно, $\tau_A \circ R_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^* \setminus sp_A(a), \tilde{A})$ для каждого $a \in A$.

§2. Спектр элементов топологических алгебр

В этом параграфе докажем основные результаты данной статьи.

Теорема I. Пусть A – отделимая локально псевдовыпуклая $\mathbb{C}$-алгебра с единицей. Если, кроме того, выполнено одно из следующих условий:

а) алгебра A обладает своцством (α)

или

б) A является алгеброй Валбрука,

то спектр $sp_A(a)$ каждого элемента $a \in A$ непуст.

алгебра при $0 < p \leq 1$. Тогда ее топология определена семейством p-однородных полунорм $\{p_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$, удовлетворяющих условию: для каждого $a \in A$ существует число $M > 0$ (не зависимое от p_α) такое, что $p_\alpha(ab) \leq M p_\alpha(b)$ для всех $b \in A$ и $\alpha \in \mathfrak{A}$. Поэтому $p_\alpha(a^n) \leq M^n p_\alpha(e_A)$ для каждых $a \in A$ и $\alpha \in \mathfrak{A}$. Учитывая это, последовательность $((a/\lambda)^n)$ сходится к нулю в алгебре A, если $|\lambda| > \sqrt[p]{M}$.

[2]Как известно (см. [I9], с. 87, или [I4], предложение I), отображение ω, определяемое на $A \times A$ равенством $\omega(a, b) = ab + ba$, непрерывно. Так как $\nu_n(a) = \omega(a, \nu_{n-1}(a)/2)$ для каждых $a \in A$ при $n \geq 2$, то непрерывны на A отображения ν_n при $n \geq 2$.

Доказательство. Предположим, что в алгебре A найдется элемент a, спектр $sp_A(a)$ которого является пустым множеством. Тогда $sp_A(a)$ ограничено и замкнуто в $\mathbb{C}$. Поэтому, по предложению , справедливо $\tau_A \circ R_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^+, \widetilde{A})$ (здесь (как и выше) $\widetilde{A}$ обозначает пополнение алгебры A, а τ_A - взаимно непрерывную всюду плотную линейную инъекцию A в $\widetilde{A}$). Так как $\widetilde{A}$ - полное отделимое локально псевдовыпуклое пространство над $\mathbb{C}$ то, по теореме Лиувилля для $\widetilde{A}$-значных голоморфных функций (см. [I5], теорема 2) $\tau_A \circ R_a$ является постоянной функцией на $\mathbb{C}^+$. В доказательстве предложения показано справедливость равенства (II) в обеих случаях а) и б). Учитывая это и инъективность отображения τ_A, получаем, что $R_a(\lambda)=\theta$ на $\mathbb{C}$, что невозможно. Следовательно, каждый элемент алгебры $\widetilde{A}$ меет непустой спектр.

Теорема 2. Пусть $p \in (0,1]$ и A - полная отделимая p-(m-псевдовыпуклая) $\mathbb{C}$-алгебра с единицей. Тогда спектр $sp_A(a)$ непуст для каждого элемента $a \in A$.

Доказательство. В стаье [I], теорема 4, показано, что алгебра A является топологически изоморфной строгому плотному проективному пределу $\varprojlim A_\alpha$ некоторой проективной системы $(A_\alpha; h_\alpha^\beta, \mathfrak{A})$ p-банаховых алгебр с единицей. Этот изоморфизм обозначим через Φ. Поскольку для каждого $a \in A$ имеет место равенство

$$sp_{\varprojlim A_\alpha}(\Phi(a)) = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} sp_{A_\alpha}(\mu_\alpha \circ \Phi(a))$$

(см. [I], теорема I в)), где μ_α обозначает каноническую проекцию $\varprojlim A_\alpha$ в A_α для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$, и спектр каждого элемента p-банаховой $\mathbb{C}$-алгебры A_α непуст, то непусто и множество $sp_{\varprojlim A_\alpha}(\Phi(a))$. Отсюда ясно, что непусто и множество $sp_A(a)$ для каждого $a \in A$.

Примечание. Следует отметить, что открытость множества $\mathrm{Inv}\, A$ в теореме Iб) излишня, если алгебра A локально выпукла, и полнота алгебры A в теореме 2 излишня, если алгебра A локально m-выпукла (см., например, [II], следствие 4.I). В статье [2], лемма 2.2а), показано, что в локально m-псевдовыпуклых алгебрах с единицей обращение элементов непрерывно. Поэтому, если кроме локально p-(m-псевдовыпуклвсти) алгебры A в теореме 2, она является Q-алгеброй, то теорема 2 непосредственно следует из теоремы Iб), а если она является равномерно поглощенно псевдовыпуклой, то из теоремы Iа). Оказывается, что существуют и такие полные отделимые p-(m-псевдовыпуклые) $\mathbb{C}$-алгебры с единицей, которые не являются ни Q-алгебрами, ни равномерно поглощенно псевдовыпуклыми алгебрами. Примером таких алгебр является алгебра $C(X)$ всех $\mathbb{C}$-значных непрерывных функций на непсевдокомпактном отделимом локально компактном пространстве X, наделенная топологией, которая определена системой $\{p_K : K \in \mathcal{K}_X\}$ p-однородных полунорм, где $\mathcal{K}_X$ обозначает множество всех компактных подмножеств пространства X,

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f^p(x)|$$

для каждой функции $f \in C(X)$ и $p \in (0,1]$.

Литература

I. Абель М. Проективные пределы топологических алгебр // Уч. зап. Тарт. ун-та. I988. Т. 836. С. 3-27.
2. Абель М., Кокк А. Локально псевдовыпуклые алгебры Гельфанда-Мазура // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем. I988. Т. 37. С. 377-386.
3. Наймарк М.А. Нормированные кольца. М.: Наука, I966.
4. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, I97I.
5. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, I969.
6. Allan G.R. A spectral theory for locally convex algebras // Proc. London Math. Soc. 1965. V. 15. P. 359-422.
7. Beckenstein E., Narici L., Suffel Ch. Topological algebras. North-Holland Math. Stud. V. 24. Amsterdam: North-Holland Math. Co., 1977.
8. Gramsch B. Integration und holomorphe Funktionen in lokal beschränkten Räumen. Math. Ann. 1965. V.162. P.190-210.
9. Gramsch B. Die klasse metrische linearer Räume L_ϕ // Math. Ann. 1967. V. 171. P. 61-78.
10. Horvath J. Topological Vector Spaces and Distributions I, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publ. Co., 1966.
11. Mallios A. Topological Algebras. Selected Topics, North-Holland Math. Stud. V.124. Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1986.
12. Michael E.A. Locally multiplicatively-convex topological algebras // Mem. Amer. Math. Soc. 1952. V.11. P.1-79.
13. Oudadess M. Théorèmes de structures et propriétés fondamentales des algèbres uniformément A-convexes complètes //

C. r. Acad. Sci. Sér. A. 1983. T. 296. P. 851-853.
14. Turpin P. Une remarque sur les algèbres à inverses continu // C. r. Acad. Sci. Sér. A. 1970. T.270. P.42-45.
15. Turpin P., Waelbroeck L. Intégration et fonctions holomorphes dans les espaces localement pseudo-convexes // C.r. Acad. Sci., Sèr. A. 1968. T.267. P.160-162.
16. Turpin P., Waelbroeck L. Algèbres localement pseudo-convexes à inverse continu // C.r. Acad. Sci. Sèr. A. 1968. T.267. P.194-195.
17. Želazko W. Metric generalizations of Banach algebras. Rozpr. mat. V.47. Warszawa: PWN, 1965.
18. Želazko W. Selected topics in topological algerbas. Lect. Notes Ser. N.31. Aarhus Univ., 1971.
19. Waelbroeck L. Vector Spaces and Algebras. Lect. Notes Math. V. 230. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.

Поступило I7.08.I988

TOPOLOGICAL ALGEBRAS WITH NON-EMPTY SPECTER

M. Abel

Summary

Let A be one of the following topological algebras with unit:

a) a locally pseudoconvex Hausdorff $\mathbb{C}$-algebra which has the property

(α) for each $a \in A$ there exists a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ such that the sequence $((a/\lambda)^n)$ converges to zero in A;

b) a locally pseudoconvex Hausdorff Waelbroeck $\mathbb{C}$-algebra or

c) a complete locally p-(m-pseudoconvex) Hausdorff C-algebra.

In this paper it is shown that every element of A has non-empty specter.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989, 846, 25-40

ПРОСТРАНСТВА ГОМОМОРФИЗМОВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МОДУЛЬ-АЛГЕБР

А. Кокк

Тартуский государственный университет

Изучению пространства гомоморфизмов топологического тензорного произведения топологических алгебр и выражению этого пространства через пространства гомоморфизмов сомножителей посвящены работы многих авторов (см., например, [19, 38, 21, 27, 28, 29, 8, 37, 17]). Имеются также работы, в которых рассматриваются описания пространства гомоморфизмов топологического A-тензорного произведения топологических A-алгебр (см. [20, 24, 26]) и пространства гомоморфизмов топологической алгебры, порожденной своими подалгебрами (см., например, [18, 15, 1, 22, 36, 25, 34, 23, 2, 6]). В этих случаях пространство гомоморфизмов реализуется в виде некоторого подпространства произведения пространств гомоморфизмов рассматриваемых подалгебр.

В настоящей работе рассматриваются аналогичные описания пространства гомоморфизмов топологических модуль-алгебр. При этом многие ранее известные теоремы оказываются частными случаями полученных ниже результатов.

В § 1 приведены определения и обозначения, используемые в дальнейшем, и доказаны основные результаты настоящей работы, описывающие пространство гомоморфизмов из топологической модуль-алгебры в топологическую алгебру. Затем, в §§ 2 и 3, эти результаты применяются соответственно, для описания пространства модуль-гомоморфизмов топологической модуль-алгебры и для описания пространства гомоморфизмов локально C^*-алгебры Фреше, порожденной двумя замкнутыми коммутативными подалгебрами.

§ 1. Описание гомоморфизмов модуль-алгебры

Введем некоторые понятия и обозначения.

Пусть $\mathbb{K}$ - поле $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ и A - топологическая $\mathbb{K}$-алгебра, т.е. A - линейное топологическое пространство над $\mathbb{K}$, являющееся ассоциативной $\mathbb{K}$-алгеброй с раздельно непрерывным умножением элементов.

Топологическая $\mathbb{K}$-алгебра B с единицей e_B называется алгеброй с непрерывным умножением, если умножение элементов алгебры B непрерывно в совокупности;

алгеброй Фреше, если на B можно определить инвариантную метрику так, что топология, порожденная этой метрикой, полна и совпадает с исходной топологией алгебры B;

локально m-выпуклой, если топология на B определена такой насыщенной системой полунорм

$$\{p_i : i \in I\}, \tag{I.I}$$

что $p_i(e_B) = 1$ и $p_i(ab) \leq p_i(a)p_i(b)$ для всех $i \in I$ и $a, b \in B$;

локально C^*-алгеброй, если B является полной комплексной локально m-выпуклой алгеброй с инволюцией, топология которой определена такой насыщенной системой полунорм (I.I), что $p_i(b^*b) = p_i(b)^2$ для всех $b \in B$ и $i \in I$;

модуль-алгеброй относительно алгебры A или, коротко, $(A,\mathbb{K})$-алгеброй, если

I) A есть топологическая $\mathbb{K}$-алгебра,

2) B есть A-бимодуль,

3) $a(b_1b_2) = (ab_1)b_2$, $b_1(b_2a) = (b_1b_2)a$ и $b_1(ab_2) = (b_1a)b_2$ для всех $a \in A$ и $b_1, b_2 \in B$,

4) $ae_B = e_Ba$ для всех $a \in A$,

5) если алгебра A имеет единицу e_A, то $e_Ab = b = be_A$ для всех $b \in B$.

$(A,\mathbb{K})$-алгебра B называется $(A,\mathbb{K})$-алгеброй с непрерывным умножением, если она является топологической $\mathbb{K}$-алгеброй с непрерывным умножением.

Пусть A – топологическая $\mathbb{K}$-алгебра с единицей, C – топологическая $\mathbb{K}$-алгебра, B – $(A,\mathbb{K})$-алгебра с единицей и пусть Z – подалгебра алгебры B такая, что $e_B \in Z$. Через $hom(A,C)$ будем обозначать множество всех нетривиальных непрерывных гомоморфизмов A в C, наделнное слабой топологией, а через AZ – подалгебру алгебры B, порожденную множеством $\{az : a \in A,\ z \in Z\}$. Пусть, далее, $hom\,A = hom(A, \mathbb{K})$, $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, $H_{AZC} = hom(A,C) \times hom(Z,C)$ и

$$[\lambda, \varrho]\Big(\sum_{k=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_k} a_k^j z_k^j\Big) = \sum_{k=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_k} \lambda(a_k^j)\varrho(z_k^j)$$

для всех пар $(\lambda, \varrho) \in H_{AZC}$, чисел $m, n_k \in \mathbb{N}$ с $k \in \mathbb{N}_m$ и элементов $a_k^j \in A$, $z_k^j \in Z$ с $k \in \mathbb{N}_m$ и $j = 1, 2, \ldots, n_k$. В случае, когда отображение $\Lambda \in hom(AZ,C)$ имеет продолжение на замыкание $cl_B AZ$ подалгебры AZ в топологии алгебры B, это продолжение будем обозначать через $\bar{A}$. Кроме того, через S_{AZC} будем обозначать множество тех пар $(\lambda, \varrho) \in H_{AZC}$, для которых выполнены условия

(α) если числа $m, n_k \in \mathbb{N}$ с $k \in \mathbb{N}_m$ и элементы $a_k^j \in A$, $z_k^j \in Z$ с $k \in \mathbb{N}_m$, $j = 1, 2, \ldots, n_k$ суть такие, что[1]

$$\sum_{k=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_k} a_k^j z_k^j = \theta_B ,$$

то

$$[\lambda, \varrho]\left(\sum_{k=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_k} a_k^j z_k^j\right) = \theta_C ,$$

(β) $\lambda(e_A) = \varrho(e_B)$

и

(γ) отображение $[\lambda, \varrho]$ непрерывно на AZ.

Следующие две теоремы служат основой для различных описаний пространства гомоморфизмов модуль-алгебр.

Теорема I. Пусть A – топологическая $\mathbb{K}$-алгебра с единицей, C – топологическая $\mathbb{K}$-алгебра с непрерывным умножением, B – $(A,\mathbb{K})$-алгебра с единицей и Z – подалгебра алгебры B такая, что $e_B \in Z$. Если

(а) отображение $a \longrightarrow a e_B$ непрерывно на A

и

(б) множество $hom(AZ, C)$ непусто,

то каждый гомоморфизм $\Lambda \in hom(AZ, C)$ определяет $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$ такой, что $\Lambda = [\lambda, \varrho]$ и отображение φ, определяемое для всех $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$ равенством $\varphi((\lambda, \varrho)) = [\lambda, \varrho]$, является гомеоморфизмом пространства S_{AZC} на $hom(AZ, C)$.

Теорема 2. Пусть A – топологическая $\mathbb{K}$-алгебра с единицей, C – полная отделимая топологическая $\mathbb{K}$-алгебра с непрерывным умножением, B – $(A,\mathbb{K})$-алгебра с непрерывным умножением и с единицей и Z – подалгебра алгебры B такая, что $e_B \in Z$. Если выполнены условия (а), (б) и

(в) подалгебра AZ всюду плотна в B,

то каждый гомоморфизм $\Lambda \in hom(B, C)$ определяет элемент $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$ такой, что $\Lambda = \overline{[\lambda, \varrho]}$, и отображение Φ, определяемое для всех $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$ равенством $\Phi((\lambda, \varrho)) = \overline{[\lambda, \varrho]}$, является биекцией S_{AZC} на $hom(B, C)$, обратное отображение которой непрерывно на $hom(B, C)$.

В частности, при выполнении и условия

(г) пространство $hom(AZ, C)$ локально равностепенно

---

[1] Через θ_B обозначается нулевой элемент алгебры B.

непрерывно,

Φ является гомеоморфизмом пространства S_{AZC} на $hom(B,C)$.

<u>Доказательство теоремы I</u>. Заметим вначале, что для каждого элемента $h \in AZ$ существуют чтсла $m, n_k \in \mathbb{N}$ с $k \in \mathbb{N}_m$ и $a_k^j \in A$, $z_k^j \in Z$ с $k \in \mathbb{N}_m$ и $j = 1, 2, \dots, n_k$ такие, что

$$h = \sum_{k=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_k} a_k^j z_k^j.$$

Для каждого $\Lambda \in hom(AZ, C)$ рассмотрим отображения ϱ_Λ и λ_Λ, определяемые для всех $a \in A$ и $z \in Z$ равенствами $\varrho_\Lambda(z) = \Lambda(z)$ и $\lambda_\Lambda(a) = \Lambda(ae_B)$. Поскольку (по условию (a)) отображение λ_Λ непрерывно, то пара $(\lambda_\Lambda, \varrho_\Lambda)$ принадлежит H_{AZC}. Более того, $(\lambda_\Lambda, \varrho_\Lambda)$ удовлетворяет условиям (α), (β) и (γ), ибо $\Lambda = [\lambda_\Lambda, \varrho_\Lambda]$. Далее, любая пара (λ, ϱ) из S_{AZC} определяет (по условию (α)) на AZ отображение $[\lambda, \varrho]$, которое непрерывно (по условию (γ)), нетривиально (по условию (β)), линейно и мультипликативно. Следовательно, $[\lambda, \varrho] \in hom(AZ, C)$ для всех $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$.

Пусть теперь $(\lambda_1, \varrho_1), (\lambda_2, \varrho_2) \in S_{AZC}$ и $(\lambda_1, \varrho_1) \neq (\lambda_2, \varrho_2)$. Тогда для некоторых $a_0 \in A$ и $z_0 \in Z$ имеем либо $[\lambda_1, \varrho_1](a_0 e_B) = \lambda_1(a_0) \neq \lambda_2(a_0) = [\lambda_2, \varrho_2](a_0 e_B)$, либо $[\lambda_1, \varrho_1](z_0) = \varrho_1(z_0) \neq \varrho_2(z_0) = [\lambda_2, \varrho_2](z_0)$. Поэтому $[\lambda_1, \varrho_1] \neq [\lambda_2, \varrho_2]$. Итак, отображение φ (определяемое для всех $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$ равенством $\varphi((\lambda, \varrho)) = [\lambda, \varrho]$) является биекцией S_{AZC} на $hom(AZ, C)$.

Далее покажем непрерывность отображения φ. Для этого пусть $(\lambda_0, \varrho_0) \in S_{AZC}$, элемент $h \in AZ$ и $\mathcal{O}$ – любая окрестность нуля алгебры C. Тогда

$$h = \sum_{k=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_k} a_k^j z_k^j$$

для некоторых $m, n_k \in \mathbb{N}$, $a_k^j \in A$, $z_k^j \in Z$ с $k \in \mathbb{N}_m$ и $j = 1, 2, \dots, n_k$ и в алгебре C найдутся окрестности нуля $\mathcal{O}_k$ с $k \in \mathbb{N}_m$ такие, что $\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 + \dots + \mathcal{O}_m \subset \mathcal{O}$. В силу непрерывности умножения в алгебре C, найдутся, в свою очередь, окрестности $\mathcal{U}_k^j$ элементов $\lambda_0(a_k^j)$ и окрестности $\mathcal{V}_k^j$ элементов $\varrho_0(z_k^j)$ такие, что

$$\mathcal{U}_k^1 \mathcal{V}_k^1 \mathcal{U}_k^2 \mathcal{V}_k^2 \dots \mathcal{U}_k^{n_k} \mathcal{V}_k^{n_k} \subset \mathcal{O}_k + \prod_{j=1}^{n_k} \lambda_0(a_k^j) \varrho_0(z_k^j)$$

для всех $k \in \mathbb{N}_m$. Пусть $\mathcal{U}_k^j = \lambda_0(a_k^j) + S_k^j$ и $\mathcal{V}_k^j = \varrho_0(z_k^j) + R_k^j$, где S_k^j и R_k^j – некоторые окрестности нуля алгебры C. Положим

$$\mathcal{W}_1 = \prod_{k=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_k} \{ \lambda \in hom(A, C) : (\lambda - \lambda_0)(a_k^j) \in S_k^j \}$$

и

$$\mathcal{W}_2 = \prod_{k=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_k} \{\varrho \in hom(Z,C) : (\varrho - \varrho_o)(z_k^j) \in R_k^j\}.$$

Теперь из $(\lambda,\varrho) \in \mathcal{W} = (\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2) \cap S_{AZC}$ сразу же вытекает

$$\prod_{j=1}^{n_k} \lambda(a_k^j)\varrho(z_k^j) \in \mathcal{O}_k + \prod_{j=1}^{n_k} \lambda_o(a_k^j)\varrho_o(z_k^j) \qquad (k \in \mathbb{N}_m),$$

в силу чего, элемент $[\lambda,\varrho](h)$ принадлежит $\mathcal{O} + [\lambda_o,\varrho_o](h)$. Тем самым показано, что для любого элемента $h \in AZ$ и любой окрестности нуля $\mathcal{O}$ алгебры C существует такая окрестность $\mathcal{W} \subset S_{AZC}$ пары (λ_o,ϱ_o), что

$$([\lambda,\varrho] - [\lambda_o,\varrho_o])(h) \in \mathcal{O}$$

для всех $(\lambda,\varrho) \in \mathcal{W}$. Но это означает непрерывность отображения φ на S_{AZC}.

Непрерывность отображения φ^{-1} на $hom(AZ,C)$ показывается аналогично как в доказательстве теоремы I из статьи [6]. Теорема доказана.

<u>Доказательство теоремы 2</u> вытекает из теоремы I и из следующего предложения.

<u>Предложение I</u>. Пусть D - топологическая K-алгебра с непрерывным умножением, E - всюду плотная подалгебра алгебры D и H - полная отделимая топологическая K-алгебра с непрерывным умножением такие, что множество $hom(E,H)$ непусто. Тогда каждый гомоморфизм $\omega \in hom(E,H)$ продолжается до гомоморфизма $\bar{\omega} \in hom(D,H)$ и отображение μ, определяемое для всех $\varrho \in hom(D,H)$ равенством[2] $\mu(\varrho) = \varrho|E$, является непрерывной биекцией пространства $hom(D,H)$ на $hom(E,H)$. В частном случае, когда пространство $hom(E,H)$ локально равностепенно непрерывно, μ является гомеоморфизмом пространств $hom(D,H)$ и $hom(E,H)$.

Доказательство см. [6], с. 4.

Из теоремы 2 вытекают

<u>Следствие I</u>. Пусть A - топологическая K-алгебра с единицей, C - полная отделимая топологическая K-алгебра с непрерывным умножением, B - (A,K)-алгебра с непрерывным умножением и с единицей и Z - подалгебра алгебры B такая, что $e_B \in Z$. Если выполнены услозия (а) и (в), то пара (λ,ϱ) из H_{AZC} удовлетворяет условиям (α), (β) и (γ) тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $\Lambda \in hom(B,C)$ такой, что $\varrho = \Lambda|Z$ и $\lambda(a) = \Lambda(ae_B)$ для всех $a \in A$.

<u>Следствие 2</u>. Пусть A - топологическая K-алгебра с еди-

---

[2] Здесь $\varrho|E$ обозначает сужение отображения ϱ на E.

ницей, C – банахова $\mathbb{K}$-алгебра с единицей, B – локально m-выпуклая $(A,\mathbb{K})$-алгебра с единицей, топология которой определена насыщенной системой полунорм (I.I) и $Z \subset B$ – такая подалгебра, что $e_B \in Z$. Если выполнены условия (а), (б), (в) и (г), то пространство $hom(B, C)$ гомеоморфно пространству тех пар $(\lambda, \varrho) \in H_{AZC}$, которые удовлетворяют условиям (β) и

(δ) существуют $K > 0$ и $i \in I$ такие, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_k} \lambda(a_k^j) \varrho(z_k^j) \right\| \leq K p_i \left(\sum_{k=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_k} a_k^j z_k^j \right)$$

для всех $m, n_k \in \mathbb{N}$, $a_k^j \in A$, $z_k^j \in Z$ с $k \in \mathbb{N}_m$ и $j = 1, 2, \dots, n_k$.

В заключение первого параграфа отметим, что приведенные нами результаты являются расширениями многих соответствующих теорем из отмеченных выше работ (см. также [9, 10, 16], [30, гл. 12], [33]).

§ 2. Пространство модуль-гомоморфизмов модуль-алгебры

Пусть A и C – топологические $\mathbb{K}$-алгебры с единицей, $C(A)$ – центр алгебры A, B – $(A,\mathbb{K})$-алгебра с единицей и пусть

$$hom_1(A,C) = \{\Lambda \in hom(A,C) : \Lambda(e_A) = e_C\}.$$

Пространством модуль-гомоморфизмов $(A,\mathbb{K})$-алгебры B будем называть множество

$$hom_A(B,A) = \{\Lambda \in hom_1(B,A) : \Lambda(a_1 b a_2) = a_1 \Lambda(b) a_2 \text{ для всех } a_1, a_2 \in A,\ b \in B\},$$

наделенное слабой топологией.

Пусть, далее, A – такая топологическая $\mathbb{K}$-алгебра, что пространство $hom\, A$ непусто, $C(hom\, A)$ – алгебра всех $\mathbb{K}$-значных непрерывных функций на $hom\, A$, наделенная компактно-открытой топологией и $\mathcal{G}_A$ – представление Гельфанда алгебры A, т.е. отображение A в $C(hom\, A)$, определяемое равенством $\mathcal{G}_A(a)(\lambda) = \lambda(a)$ для всех $a \in A$ и $\lambda \in hom\, A$.

Для описания пространства модуль-гомоморфизмов модуль-алгебры и выражения этого пространства через некоторое множество непрерывных отображений, нам понадобятся следующие два предложения.

<u>Предложение 2</u>. Пусть A – топологическая $\mathbb{K}$-алгебра с непрерывным умножением и с единицей, B – $(A,\mathbb{K})$-алгебра с единицей и Z – подалгебра алгебры B такая, что $e_B \in Z$. Если выполнены условия (а),

(д) $az = za$ для всех $a \in A$ и $z \in \mathcal{Z}$

и

(е) пространство $\hom_A(A\mathcal{Z}, A)$ непусто,

то существует гомеоморфизм Ψ пространства $\hom_A(A\mathcal{Z}, A)$ в $\hom_1(\mathcal{Z}, C(A))$ такой, что

$$\Lambda\Big(\sum_{k=1}^{m} a_k z_k\Big) = \sum_{k=1}^{m} a_k(\Psi(\Lambda)(z_k))$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, $\Lambda \in \hom_A(A\mathcal{Z}, A)$ и $a_k \in A$, $z_k \in \mathcal{Z}$ с $k \in \mathbb{N}_m$.

<u>Предложение 3</u>. Пусть A - такая топологическая $\mathbb{C}$-алгебра, что пространство $\hom A$ непусто и B - коммутативная локально C^*-алгебра Фреше с единицей. Если представление Гельфанда $\mathcal{G}_A$ алгебры A непрерывно, то существует биекция δ пространства $\hom_1(A, B)$ на множество $C(\hom B, \hom A)$ всех непрерывных отображений $\hom B$ в $\hom A$.

<u>Доказательство предложения 2</u>. Пусть φ - гомеоморфизм $S_{A\mathcal{Z}A}$ на $\hom(A\mathcal{Z}, A)$ такой, что $\varphi((\lambda, \varrho)) = [\lambda, \varrho]$ для всех $(\lambda, \varrho) \in S_{A\mathcal{Z}A}$ (φ существует по теореме I) и пусть $\Lambda \in \hom_A(A\mathcal{Z}, A)$. Тогда $\Lambda = [\lambda, \varrho]$, где $(\lambda, \varrho) = \varphi^{-1}(\Lambda)$ и, поскольку, $(\lambda, \varrho) \in S_{A\mathcal{Z}A}$, то (по условию ($\beta$)) $\Lambda(z) = \lambda(e_A)\varrho(z) = \varrho(z)$ для всех $z \in \mathcal{Z}$. Ввиду этого, $a\varrho(z) = a\Lambda(z)e_A = \Lambda(az) = \Lambda(e_A z a) = \varrho(z)a$ для всех $a \in A$, $z \in \mathcal{Z}$. Значит, $\varrho(z) \in C(A)$ для всех $z \in \mathcal{Z}$. Кроме того, $\lambda(a) = \lambda(a)\varrho(e_B) = \Lambda(ae_B) = a\Lambda(e_B)e_A = a$ для всех $a \in A$ и, следовательно, для всех $a \in A$ и $z \in \mathcal{Z}$ справедливо равенство

$$\Lambda(az) = \lambda(a)\varrho(z) = a\varrho(z) = a((\pi \circ \varphi^{-1})(\Lambda))(z),$$

где π - проекция праствавнста $H_{A\mathcal{Z}A}$ на $\hom(\mathcal{Z}, A)$. Пусть $\varphi_1 = \pi \circ \varphi^{-1}$ и ν - гомеоморфизм $\hom_1(\mathcal{Z}, C(A))$ в $\hom(\mathcal{Z}, A)$ такой, что $\nu(\Lambda)(z) = \Lambda(z)$ для всех $\Lambda \in \hom_1(\mathcal{Z}, C(A))$ и $z \in \mathcal{Z}$. Из сказанного выше следует теперь, что на $\hom_A(A\mathcal{Z}, A)$ существует отображение $\Psi = \nu^{-1} \circ \varphi_1$ которое и является гомеоморфизмом $\hom_A(A\mathcal{Z}, A)$ в $\hom_1(\mathcal{Z}, C(A))$. При этом

$$\Lambda\Big(\sum_{k=1}^{m} a_k z_k\Big) = \sum_{k=1}^{m} \Lambda(a_k z_k) = \sum_{k=1}^{m} a_k(\pi \circ \varphi^{-1})(\Lambda)(z_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k \Psi(\Lambda)(z_k)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$ и $a_k \in A$, $z_k \in \mathcal{Z}$ с $k \in \mathbb{N}_m$. Предложение 2 доказано.

<u>Доказательство предложения 3</u>. Известно (см. [I2]), что представление Гельфанда $\mathcal{G}_B$ коммутативной локально C^*-алгеб-

ры Фреше B с единицей является топологическим изоморфизмом B на $C(\mathrm{hom}\, B)$.

Пусть δ – отображение $\mathrm{hom}_1(A,B)$ в $C(\mathrm{hom}\, B, \mathrm{hom}\, A)$, определяемое для всех $\Lambda \in \mathrm{hom}_1(A,B)$ и $\varrho \in \mathrm{hom}\, B$ равенством $\delta(\Lambda)(\varrho) = \varrho \circ \Lambda$. Поскольку ϑ_B – топологический изоморфизм B на $C(\mathrm{hom}\, B)$, то для каждого ненулевого элемента $b \in B$ найдется $\varrho \in \mathrm{hom}\, B$ такой, что $\varrho(b) \neq 0$. Поэтому $\delta(\Lambda_1) \neq \delta(\Lambda_2)$ для всех различных гомоморфизмов Λ_1, Λ_2 из $\mathrm{hom}_1(A,B)$. Итак, отображение δ является взаимно однозначным на $\mathrm{hom}_1(A,B)$. Легко убедиться и в том, что δ является сюръективным. В самом деле, пусть $f \in C(\mathrm{hom}\, B, \mathrm{hom}\, A)$ – некоторое отображение и пусть f^* – отображение, определяемое равенством $f^*(d) = d \circ f$ для всех $d \in C(\mathrm{hom}\, A)$. Тогда $f^* \in \mathrm{hom}_1(C(\mathrm{hom}\, A), C(\mathrm{hom}\, B))$ и, следовательно, $\Lambda = \vartheta_B^{-1} \circ f^* \circ \vartheta_A$ принадлежит $\mathrm{hom}_1(A,B)$. Теперь $\vartheta_B(\Lambda(a)) = \vartheta_A(a) \circ f$ для всех $a \in A$ и, потому,

$$\varrho(\Lambda(a)) = (\vartheta_A(a) \circ f)(\varrho) = \vartheta_A(a)(f(\varrho)) = (f(\varrho))(a)$$

для всех $a \in A$, $\varrho \in \mathrm{hom}\, B$. Таким образом, $\delta(\Lambda)(\varrho) = \varrho \circ \Lambda = f(\varrho)$ для всех $\varrho \in \mathrm{hom}\, B$, т.е. $\delta(\Lambda) = f$. Предложение доказано.

В дальнейшем рассмотрим пространство модуль-гомоморфизмов $(A,\mathbb{K})$-алгебры B в случае, когда центр $C(A)$ алгебры A тривиален, т.е. $C(A) = \{\alpha e_A : \alpha \in \mathbb{K}\}$. Справедлива

<u>Теорема 3</u>. Пусть A – отделимая топологическая $\mathbb{K}$-алгебра с непрерывным умножением и с единицей, B – $(A,\mathbb{K})$-алгебра с единицей и Z – подалгебра алгебры B такая, что $e_B \in Z$. Если центр $C(A)$ алгебры A тривиален и выполнены условия (а), (в), (д), (е) и

(ж) для каждого $\varrho \in \mathrm{hom}\, Z$ найдется гомоморфизм $\Phi_\varrho \in \mathrm{hom}_A(B,A)$ такой, что для всех $a \in A$, $z \in Z$ справедливо $\Phi_\varrho(az) = a\varrho(z)$,

то отображение $\Phi_\varrho \longrightarrow \varrho$ является непрерывной биекцией $\mathrm{hom}_A(B,A)$ на $\mathrm{hom}\, Z$.

<u>Доказательство</u>. Заметим, во-первых, что отображение $\tau : \alpha e_A \longrightarrow \alpha$ является изоморфизмом $C(A)$ на $\mathbb{K}$. Чтобы показать непрерывность отображения τ, берем любую окрестность нуля $\mathcal{O}$ в $\mathbb{K}$. Тогда $\mathcal{O}_\varepsilon = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| < \varepsilon\} \subset \mathcal{O}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Если $\alpha_0 \in \mathcal{O}_\varepsilon \setminus \{0\}$, то (в силу отделимости алгебры A) существует закругленная окрестность нуля $\mathcal{V} \subset C(A)$ такая, что $\alpha_0 e_A \notin \mathcal{V}$. Теперь из $\alpha e_A \in \mathcal{V}$ вытекает $\alpha \in \mathcal{O}_\varepsilon$. В самом деле, если $\alpha e_A \in \mathcal{V}$ и $|\alpha| \geq \varepsilon$, то $|\alpha_0 \alpha^{-1}| < 1$, в силу чего $\alpha_0 e_A = (\alpha_0 \alpha^{-1})(\alpha e_A) \in \mathcal{V}$.

Но это невозможно. Значит, отображение τ непрерывно в точке θ_A и, следовательно, на $C(A)$. Кроме того, $\tau^{-1}(\alpha) = \alpha e_A$ для всех $\alpha \in \mathbb{K}$. Отсюда ясно, что непрерывно и отображение τ^{-1}. Итак, τ является топологическим изоморфизмом $C(A)$ на $\mathbb{K}$. В силу этого, отображение τ^*, определяемое для всех $\varrho \in hom_1(\mathcal{Z}, C(A))$ равенством $\tau^*(\varrho) = \tau \circ \varrho$, является гомеоморфизмом пространства $hom_1(\mathcal{Z}, C(A))$ на $hom\,\mathcal{Z}$. Поэтому $\omega = \tau^* \circ \Psi$ (здесь Ψ суть гомеоморфизм пространства $hom_A(A\mathcal{Z}, A)$ в $hom_1(\mathcal{Z}, C(A))$ определенное в предложении 2) является гомеоморфизмом $hom_A(A\mathcal{Z}, A)$ в $hom\,\mathcal{Z}$. Пусть μ – отображение $hom_A(B, A)$ в $hom_A(A\mathcal{Z}, A)$, определяемое для всех $\Lambda \in hom_A(B, A)$ равенством $\mu(\Lambda) = \Lambda | A\mathcal{Z}$. Тогда отображение μ непрерывно на $hom_A(B, A)$ и, значит, $\psi = \omega \circ \mu$ есть непрерывное отображение $hom_A(B, A)$ в $hom\,\mathcal{Z}$. При этом

$$e_A(\psi(\Phi_\varrho)(z)) = e_A(\tau(\Psi(\mu(\Phi_\varrho))(z))) = \mu(\Phi_\varrho)(z) = e_A \varrho(z)$$

для всех $\varrho \in hom\,\mathcal{Z}$ и $z \in \mathcal{Z}$. Поэтому $\psi(\Phi_\varrho) = \varrho$ для всех $\varrho \in hom\,\mathcal{Z}$. Далее, по условию (ж) ясно, что ψ является отображением $hom_A(B, A)$ на $hom\,\mathcal{Z}$. Но поскольку алгебра A отделима, то ψ является и взаимно однозначным (по условию (в)). Теорема доказана.

Пусть теперь A – локально C^*-алгебра Фреше с единицей, B – $(A,\mathbb{K})$-алгебра с единицей и $\mathcal{Z}$ – замкнутая подалгебра алгебры B такая, что $e_B \in \mathcal{Z}$. Если B является комплексной локально m-выпуклой алгеброй Фреше и пространство $hom\,\mathcal{Z}$ непусто, то представление Гельфанда $\mathcal{G}_{\mathcal{Z}}$ алгебры $\mathcal{Z}$ непрерывно (см., например, [31], с. 14). Поскольку центр $C(A)$ локально C^*-алгебры Фреше с единицей является коммутативной локально C^*-алгеброй Фреше с единицей, то, согласно предложению 3, пространства $hom_1(\mathcal{Z}, C(A))$ и $C(hom\,C(A), hom\,\mathcal{Z})$ биективны. Далее, если выполнены условия (а), (в), (д), (е) и

(з) каждый гомоморфизм $\varrho \in hom_1(\mathcal{Z}, C(A))$ продолжается до такого гомоморфизма $\Lambda_\varrho \in hom_A(B,A)$, что $\Lambda_\varrho(az) = a\varrho(z)$ для всех $a \in A$, $z \in \mathcal{Z}$,

то, по предложению 2, биективны и множества $hom_A(A\mathcal{Z}, A)$ и $hom_1(\mathcal{Z}, C(A))$. Учитывая теперь то, что каждый гомоморфизм $\Lambda \in hom_A(A\mathcal{Z}, A)$ продолжается до гомоморфизма $\Lambda \in hom_A(B, A)$ (по условию (з)), мы получаем следующий результат.

<u>Теорема 4</u>. Пусть A – локально C^*-алгебра Фреше с еди-

5

ницей, B – $(A,\mathbb{K})$-алгебра с единицей и $\mathcal{Z}$ – замкнутая подалгебра алгебры B. Если B является комплексной локально m-выпуклой алгеброй Фреше, $e_B \in \mathcal{Z}$ и выполнены условия (а), (в), (д), (е) и (з), то множества $\hom_A(B,A)$ и $C(\hom C(A), \hom \mathcal{Z})$ биективны.

В частном случае, когда $B = C(X,A)$ – алгебра всех непрерывных функций компактного пространства X в C^*-алгебру A, пространство модуль-гомоморфизмов $\hom_A(B,A)$ есть нечто иное, чем относительный спектр алгебры B (см. [3, 4]).

§ 3. Пространство гомоморфизмов локально C^*-алгебры Фреше, порожденной своими подалгебрами

Пусть A – локально C^*-алгебра с единицей, топология которой определена насыщенной системой полунорм (I.I), и пусть $i_o \in I$, $\lambda_o \in \hom A$ такие, что $|\lambda_o(a)| \le p_i(a)$ для всех $a \in A$. Через $A(i_o)$ будем обозначать множество всех таких функционалов Λ на A, что $\Lambda(e_A)=1$ и $|\Lambda(a)| \le p_i(a)$ для всех $a \in A$; а через $A(i_o,\lambda_o)$ – множество тех $a \in A$ для которых $\lambda_o(a) = p_{i_o}(a) = 1$ и $0 \le \lambda(a) \le 1$ для всех $\lambda \in \hom A$. Так как для всех a_1, a_2 из $A(i_o,\lambda_o)$ справедливо

$$1 = |\lambda_o(a_1)\lambda_o(a_2)| = |\lambda_o(a_1 a_2)| \le p_{i_o}(a_1 a_2) \le \le p_{i_o}(a_1) p_{i_o}(a_2) = 1,$$

то $a_1 a_2 \in A(i_o,\lambda_o)$. Более того, для всех a_1, a_2 из $A(i_o,\lambda_o)$ имеем

$$2 = |\lambda_o(a_1) + \lambda_o(a_2)| = |\lambda_o(a_1+a_2)| \le p_{i_o}(a_1+a_2) \le \le p_{i_o}(a_1) + p_{i_o}(a_2) = 2 .$$

Поэтому и элемент $(a_1+a_2)/2$ содержится в $A(i_o,\lambda_o)$.

Далее, для каждого $i \in I$ через A_i обозначим факторалгебру $A/\ker p_i$, а через π_i – естественный гомоморфизм A на A_i. Положив $(\pi_i(a))^* = \pi_i(a^*)$ и $\|\pi_i(a)\| = p_i(a)$ для всех $a \in A$, заметим (см. [31], с. 9), что A_i суть нормированная алгебра с инволюцией, удовлетворяющая для всех $a \in A$ условию $\|\pi_i(a)^*\pi_i(a)\| = \|\pi_i(a)\|^2$. Для каждых $i \in I$, $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ через $\sigma_i^N(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ будем обозначать совместный нормальный аппроксимативный спектр набора элементов $(\pi_i(a_1), \pi_i(a_2), \ldots, \pi_i(a_n))$, т.е. множество тех $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, для которых существует такая последовательность $\pi_i(x_k)_{k\ge1} \subset A_i$, что $\|\pi_i(x_k)\| = 1$ $(k \ge 1)$,

$$\lim_{k\to\infty} \|\pi_i((a_j-\alpha_j e_A)x_k)\| = 0$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \|\pi_i(x_k^*(a_j-\alpha_j e_A))\| = 0$$

для всех $j \in \mathbb{N}_n$.

В дальнейшем рассмотрим некоторое описание пространства гомоморфизмов локально C^*-алгебры Фреше, порожденной двумя замкнутыми коммутатикными подалгебрами. Справедлива

Теорема 5. Пусть C – локально C^*-алгебра Фреше с единицей, топология которой определена насыщенной системой полунорм (I.I) и которая порождена такими коммутативными локально C^*-подалгебрами A и B, что $e_C \in A \cap B$. Тогда для любой пары (λ, ϱ) из H_{ABC} следующие утверждения равносильны:

I) существует гомоморфизм $\Lambda \in \mathrm{hom}\, C$ такой, что $\Lambda | A = \lambda$ и $\Lambda | B = \varrho$;

2) существует $i \in I$ такой, что $\lambda \in A(i)$, $\varrho \in B(i)$ и $p_i(ab) = p_i(a)p_i(b)$ для всех $a \in A(i,\lambda)$, $b \in B(i,\varrho)$;

3) существует $i \in I$ такой, что $\lambda \in A(i)$, $\varrho \in B(i)$ и $p_i(a+b) = p_i(a)+p_i(b)$ для всех $a \in A(i,\lambda)$, $b \in B(i,\varrho)$;

4) существуют $i \in I$ и $\Lambda \in C(i)$ такие, что $\Lambda(a) = \lambda(a)$ и $\Lambda(b) = \varrho(b)$ для всех $a \in A(i,\lambda)$, $b \in B(i,\varrho)$;

5) существует $i \in I$ такой, что для всех $n, m \in \mathbb{N}$, $a_j \in A(i,\lambda)$ и $b_k \in B(i,\varrho)$ с $j \in \mathbb{N}_n$, $k \in \mathbb{N}_m$ имеем

$$(\lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_n), \varrho(b_1), \ldots, \varrho(b_m)) \in \sigma_i^M(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m).$$

Доказательство проведем по схеме

$$\begin{array}{ccccc} 2) & \Longleftarrow & 1) & \Longrightarrow & 3) \\ \Downarrow & & \Uparrow & & \Downarrow \\ 4) & \Longrightarrow & 5) & \Longleftarrow & 4) \end{array}$$

I) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $\Lambda \in \mathrm{hom}\, C$ такой, что $\Lambda | A = \lambda$ и $\Lambda | B = \varrho$. В силу непрерывности гомоморфизма Λ найдутся $K > 0$ и $i \in I$ такие, что $|\Lambda(c)| \leq K p_i(c)$ для всех $c \in C$. Значит, отображение Λ_1 , определяемое для всех $c \in C$ равенством $\Lambda_1(\pi_i(c)) = \Lambda(c)$, принадлежит $\mathrm{hom}\, C_i$. Учитывая полноту алгебры C_i (см. [13]) можно утверждать, что для всех $c \in C$ справедливо

$$|\Lambda(c)| = |\Lambda_1(\pi_i(c))| \leq \|\pi_i(c)\| = p_i(c)$$

(см. [5] , с. 50). Поэтому

$$p_i(a)p_i(b) = |\lambda(a)||\varrho(b)| = |\Lambda(ab)| \leq p_i(ab) \leq$$
$$\leq p_i(a)p_i(b)$$

для всех $a \in A(i,\lambda)$, $b \in B(i,\varrho)$ и $|\lambda(a)| = |\Lambda(a)| \leq p_i(a)$, $|\varrho(b)| = |\Lambda(b)| \leq p_i(b)$ для всех $a \in A$, $b \in B$.

I) $\Longrightarrow$ 3) доказывается аналогично доказательству I) $\Longrightarrow$ 2).

2) $\Longrightarrow$ 4). Пусть $i \in I$ такой, что $\lambda \in A(i)$, $\varrho \in B(i)$ и $p_i(ab) = p_i(a)p_i(b)$ для всех $a \in A(i,\lambda)$, $b \in B(i,\varrho)$. Как было уже отмечено, C_i является C^*-алгеброй и, следовательно, существует изометрический $*$-изоморфизм T алгебры C_i в алгебру $L(H)$ линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H. При этом $\bar{e} = e_{L(H)} = T(\pi_i(e_c))$ (см. [I4], с. 265). Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j, \beta_k \in \mathbb{C}$, $a_j \in A(i,\lambda)$ и $b_k \in B(i,\varrho)$ с $j \in \mathbb{N}_m$, $k \in \mathbb{N}_n$ и пусть

$$a = \prod_{j=1}^{m} a_j, \qquad b = \prod_{k=1}^{n} b_k$$

и

$$c = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (a_j - e_c) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k (b_k - e_c).$$

Оказывается, что $p_i(c - e_c) \geqslant 1$. В самом деле, пусть $\bar{c} = T(\pi_i(c))$, $\bar{a} = T(\pi_i(a))$, $\bar{b} = T(\pi_i(b))$, $\bar{a}_j = T(\pi_i(a_j))$ и $\bar{b}_k = T(\pi_i(b_k))$ с $j \in \mathbb{N}_m$, $k \in \mathbb{N}_n$. Так как $a \in A(i,\lambda)$ и $b \in B(i,\varrho)$, то

$$\|\bar{a}\bar{b}\| = \|\pi_i(ab)\| = p_i(ab) = p_i(a)p_i(b) = 1.$$

Значит, в H существует последовательность $(h_\ell)_{\ell \geqslant 1}$ такая, что $\|h_\ell\| = 1$ ($\ell \geqslant 1$) и

$$\lim_{\ell\to\infty} \|\bar{a}\bar{b}(h_\ell)\| = 1.$$

Отсюда

$$\lim_{\ell\to\infty} \|\bar{b}_k(h_\ell)\| = \lim_{\ell\to\infty} \|\bar{b}(h_\ell)\| = 1$$

для всех $k \in \mathbb{N}_n$. Поскольку

$$\lim_{\ell\to\infty} \|(\bar{b} - \bar{e})(h_\ell)\| = 0$$

(см. [II], с. 240), то, в силу равенства

$$\big|\,\|\bar{a}\bar{b}(h_\ell)\| - \|\bar{a}(h_\ell)\|\,\big| \leqslant \|(\bar{a}(\bar{b} - \bar{e}))(h_\ell)\| \leqslant \|(\bar{b} - \bar{e})(h_\ell)\|$$

имеем

$$\lim_{\ell\to\infty} \|\bar{a}_j(h_\ell)\| = \lim_{\ell\to\infty} \|\bar{a}(h_\ell)\| = 1$$

для всех $j \in \mathbb{N}_m$. Теперь

$$\lim_{\ell\to\infty} \|(\bar{a}_j - \bar{e})(h_\ell)\| = 0$$

для всех $j \in \mathbb{N}_m$. Кроме того,

$$\big|\,\|\bar{c}(h_\ell)\| - 1\,\big| \leqslant \|(\bar{c} - \bar{e})(h_\ell)\| \leqslant \|\bar{c} - \bar{e}\| \leqslant$$

$$\le p_i(c-e)$$

и

$$\|\bar{c}(h_\ell)\| \le \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| \, \|(\bar{a}_j - \bar{e})(h_\ell)\| + \\ + \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| \, \|(\bar{b}_k - \bar{e})(h_\ell)\|$$

для всех $\ell \ge 1$. Отсюда ясно, что $p_i(c-e_c) \ge 1$. Согласно теореме Хана-Банаха существует теперь $\Lambda \in C(i)$ такой, что $\Lambda(a) = \lambda(a)$, $\Lambda(b) = \varrho(b)$ для всех $a \in A(i,\lambda)$, $b \in B(i,\varrho)$.

3) $\Longrightarrow$ 4) доказывается аналогично доказательству 2) $\Longrightarrow$ 4).

4) $\Longrightarrow$ 5). Пусть $i \in I$ и пусть $\Lambda \in C(i)$ такой, что $\Lambda(a) = \lambda(a)$, $\Lambda(b) = \varrho(b)$ для всех $a \in A(i,\lambda)$, $b \in B(i,\varrho)$. Положим $\Lambda_1(\pi_i(c)) = \Lambda(c)$ для всех $c \in C$. Ясно, что Λ_1 является непрерывным функционалом на C_i. При этом $|\Lambda_1(\pi_i(c))| = |\Lambda(c)| \le p_i(c) = \|\pi_i(c)\|$ для всех $c \in C$ и $\Lambda_1(\pi_i(e_c)) = 1$. Поэтому

$$(\lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_m), \varrho(b_1), \ldots, \varrho(b_n)) = \\ = (\Lambda_1(\pi_i(a_1)), \ldots, \Lambda_1(\pi_i(a_m)), \Lambda_1(\pi_i(b_1)), \ldots, \Lambda_1(\pi_i(b_n))) \in \\ \in \delta_i^N(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$$

для всех $m, n \in \mathbb{N}$, $a_j \in A(i,\lambda)$, $b_k \in B(i,\varrho)$ с $j \in \mathbb{N}_m$, $k \in \mathbb{N}_n$ (см. [32], с. 257).

5) $\Longrightarrow$ I) см. [7], теорема 5.

В заключение отметим, что в случае C^*-алгебр эквивалентность условий I) и 2) показана в [34] и [35].

Литература

I. Абель М. Описание линейных мультипликативных функционалов в алгебрах непрерывных функции // Уч. зап. Тарт. ун-та. I977. Т. 430. С. I4-2I.
2. Абель М. Фиксированные идеалы в топологических модуль-алгебрах// Изв. АН ЭССР. Физ. Мат. I985. Т.34. С.237-247.
3. Арзуманян В.А., Григорян С.А. Равномерные алгебры операторных полей // Зап. науч. семинаров Ленингр. Отд. Мат. ин-та. АН СССР. I983. Т. I23. С. I85-I89.
4. Арзуманян В.А., Григорян С.А. Спектр равномерных алгебр операторных полей // Изв. АН АрмССР. Мат. I986. Т. 2I. С 63-79.
5. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика // М.: Мир, I982.
6. Кокк А. Описание гомоморфизмов топологических модуль-ал-

гебр // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат. 1987. Т. 36. С. I-7.
7. Кокк А. Совместный спектр и продолжение гомоморфизмов топологических алгебр // Уч. зап. Тарт. ун-та. 1989. Т.836. С. 95-110.
8. Лопушанский О.В. О преобразовании Гельфанда локально выпуклых алгебр // Укр. мат. ж. 1985. Т. 37. С. 120-123.
9. Allan R.G. On one-sided inverses in Banach algebras of holomorphic vector-valued functions // J. London Math. Soc. 1967. V. 42. P. 463-470.
10. Allan R.G. Ideals of vector-valued functions // Proc. London Math. Soc. 1968. V. 13. P. 193-216.
11. Amemiya I., Ando T. Convergence of random products of contractions in Hilbert space // Acta. sci. math. 1965. V. 26. P. 239-244.
12. Apostol C. b^*-algebras and their representation // J. London Math. Soc. 1971. V. 3. P. 30-38.
13. Arahovitis J. On various types of barrelledness of a topological algebra // Yokohama Math. J. 1984. V. 32. P. 1-13.
14. Berberian S.K. Lectures in Functional Analysis and Operator Theory // New York Inc.: Springer-Verlag, 1974.
15. Blumenthal R.G. The spectrum of a function algebra // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 25. P. 343-346.
16. Enomoto M., Tamaki K. On a theorem of Pearcy and Ringrose // Math. Jap. 1973. V. 18. P. 253-256.
17. Fragoulopoulou M. Representations of tensor product L.M.C. $*$-algebras // Manuscr. math. 1983. V. 42. P. 115-145.
18. Fuhrman P.A. On maximal ideals in two algebras of operator valued analytic functions// Isr. J. Math. 1970. V. 8. P. 23-27.
19. Gelbaum B.R. Tensor products of Banach algebras // Can. J. Math. 1959. V. 11. P. 297-310.
20. Gelbaum B.R. Tensor products over Banach algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 118. P. 131-149.
21. Gil de Lamadrid J. Uniform cross norms and tensor products of Banach algebras // Bull. Amer. Math. Soc. 1963. V. 69. P. 797-803.
22. Govaerts W. Homomorphisms of weighted algebras of continuous functions // Ann. mat. pura ed appl. 1978. V. 116. P. 151-158.
23. Halpern H. Harmonic analysis of abelian inner auto-

morphism groups of von Neumann algebras // Math. scand. 1982. V. 50. P. 79-99.

24. Kerlin J.E. Tensor products of group algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 175. P. 1-36.
25. Khan L.A. A characterization of strictly closed ideals in vector-valued function algebras// Math. Jap. 1986. V. 31. P. 45-49.
26. Kyriazis A. On the spectra of topological A-tensor product A-algebras // Yokohama Math. J. 1983. V. 31. P. 47-65.
27. Laursen K.B. Maximal two sided ideals in tensor products of Banach algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 25. P. 475-480.
28. Mallios A. Heredity of tensor products of topological algebras // Math. Ann. 1966. V. 162. P. 246-257.
29. Mallios A. Topological algebras in several complex variables // Lect. Notes Math. 1974. V. 399. P. 342-377.
30. Mallios A. Topological algebras. Selected topics // Amsterdam: North-Holland, 1986.
31. Michael E.A. Locally multiplicatively-convex topological algebras // Mem. AMS. 1952. V. 11.
32. Mocanu Gh. The joint approximate spectrum of a finite system of elements of a C^*-algebra // Stud. math. 1974. V. 49. P. 253-262.
33. Pearcy C., Ringrose J.R. Trace preserving isomorphism in finite operator algebras // Amer. J. Math. 1968. V. 90. P. 444-455.
34. Power S.C. Commutator ideals and pseudodifferential C^*-algebras // Quart. J. Math. 1980. V. 31. P. 467-489.
35. Power S.C. Characters on C^*-algebras, the joint normal spectrum, and a pseudodifferential C^*-algebra // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1981. V. 24. P. 47-53.
36. Prolla J.B. Topological algebras and vector-valued continuous functions // J. Math. Anal. and Appl. 1981. Pt. B. P. 727-740.
37. Smith H.A. Positive functionals and representations of tensor products of symmetric Banach algebras // Can. J. Math. 1968. V. 20. P. 1192-1202.
38. Tomiyama J. Tensor products of commutative Banach algebras // Tôhoku Math. J. 1960. V. 12. P. 147-154.

Поступило 28.II.1988

SPACES OF HOMOMORPHISMS OF TOPOLOGICAL MODULE-ALGEBRAS

A. Kokk

Summary

Let $\mathbb{K}$ be one of the fields $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, A and C be topological $\mathbb{K}$-algebras and let $hom(A, C)$ be the set of all non-zero continuous homomorphisms of A into C, endowed with the topology of simple convergence in A.

A topological algebra B with identity e_B is called a topological $(A, \mathbb{K})$-algebra if:

1) A is a topological $\mathbb{K}$-algebra with identity e_A;

2) B is a A-bimodule with separately continuous module multiplications;

3) $(ab_1)b_2 = a(b_1b_2)$, $(b_1b_2)a = b_1(b_2a)$ and $(b_1a)b_2 = b_1(ab_2)$ for all $a \in A$, $b_1, b_2 \in B$;

4) $e_A b = b = b e_A$ for all $b \in B$

and

5) $a e_B = e_B a$ for all $a \in A$.

Now, let C be a topological $\mathbb{K}$-algebra and let B be a topological $(A, \mathbb{K})$-algebra with identity. Moreover, let Z be a subalgebra of B such that the subalgebra AZ generated by the set $\{az : a \in A, z \in Z\}$ is dense in B.

In this paper we characterize the space $hom(B, C)$. In section 1, this space is realized as a certain subset of the product space $hom(A, C) \times hom(Z, C)$. In sections 2 and 3, we use this realization to characterize the space of module-homomorphisms of a topological module-algebra and to determine the space of characters on a locally C^*-algebra which is generated by two commutative locally C^*-subalgebras.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989, 846, 41–49

СИЛЬНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ МИНИМАЛЬНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ТЕОРЕМА О МОНОТОННОМ $*$-СЛАБОМ БАЗИСЕ

Э. Оя

Тартуский государственный университет

1. Пусть X – нормированное пространство и $Y\neq\{0\}$ – его подпространство. Говорят [9], что Y обладает свойством U в X (или свойством единственности минимального продолжения линейных непрерывных функционалов), если любой элемент g из сопряженного пространства Y^* допускает единственное продолжение $f\in X^*$, сохраняющее норму. В [3] было введено и изучено сильное свойство U (коротко, свойство SU): подпространство Y обладает свойством SU в X, если его аннулятор $Y^\perp$ имеет дополнение в X^*, обозначаемое через G, такое, что при всех $f\in X^*$, $f=g+h$, $g\in G$, $h\in Y^\perp$, $h\neq 0$ выполняется неравенство $\|f\|>\|g\|$. Известно [3], что Y обладает свойством SU в X тогда и только тогда, когда Y обладает свойством U в X и существует линейный непрерывный проектор P в X^* с $\|P\|=1$, $\operatorname{Ker} P = Y^\perp$.

Обозначим через i тождественное отображение из Y в X. Тогда сопряженный к i оператор i^* каждому функционалу $f\in X^*$ ставит в соответствие его сужение на Y. Введем обозначение

$$Y^\# = \{f\in X^* : \|i^*f\| = \|f\|\}.$$

Если Y обладает свойством SU в X, то (см.[3]) дополнение G в определении свойства SU является единственным, причем $G = Y^\#$.

В [3] доказано, что Y обладает свойством SU в X тогда и только тогда, когда существует изометрический изоморфизм $\varkappa$ из Y^* в X^* такой, что

$$f - \varkappa i^* f \in Y^\perp \quad \forall f\in X^*, \tag{1}$$

причем

$$\|f\| > \|i^*f\|, \text{ если } f\in X^* \text{ и } f\neq \varkappa i^* f. \tag{2}$$

В настоящей заметке устанавливается единственность $\mathscr{H}$ (см. теорему I) и показывают, какими сетями операторов $\mathscr{H}$ может быть порожден (см. теорему 2).

Предложение. Пусть Y обладает свойством U в X. Если линейный непрерывный проектор P в X^* удовлетворяет условиям $\|P\|=1$ и $\operatorname{Ker} P = Y^{\perp}$, то $\operatorname{Im} P = Y^{\#}$.

Доказательство. Согласно вышесказанному, Y обладает свойством SU в X, причем $G=Y^{\#}$ в определении свойства SU. Поэтому остается показать, что в качестве G из определения свойства SU можно взять $\operatorname{Im} P$. Рассмотрим $f \in X^*$. Тогда $f = Pf + h$, $h \in Y^{\perp}$. Поскольку $\|P\| = 1$, то $\|f\| \geqslant \|Pf\|$. Заметим, что $i^*f = i^*Pf$. Если $\|f\| = \|Pf\|$, то в силу свойства U имеем $f = Pf$, т.е. $h = 0$. Итак, $\|f\| > \|Pf\|$, если $h \neq 0$.

Имеем непосредственное

Следствие I. Если Y обладает свойством SU в X, то существует один и только один линейный непрерывный проектор P в X^*, удовлетворяющий условиям $\|P\|=1$ и $\operatorname{Ker} P = Y^{\perp}$. При этом $\operatorname{Im} P = Y^{\#}$.

Замечание I. Расширяя терминологию [6], можно сказать, что подпространство Y единственно разложимо в X, если существует один и только один линейный непрерывный проектор P в X^*, удовлетворяющий условиям $\|P\|=1$ и $\operatorname{Ker} P = Y^{\perp}$. Банаховы пространства Y, единственно разложимы в Y^{**}, изучены в [6].

Замечание 2. В [I] установлены достаточные условия единственности проектора с единичной нормы в банаховом пространстве X. Из [I] и теоремы Бишопа-Фелпса (см.,например, [5], стр. I89) следует, что если подпространство $Y \subset X$ обладает свойством U, то в X не существует более одного проектора Q с $\|Q\|=1$, $\operatorname{Im} Q = Y$. Этот результат легко вытекает и из нашего предложения, так как единственность проектора P с $\|P\|=1$ и $\operatorname{Ker} P = Y^{\perp}$ в X^* влечет за собой единственность проектора Q с $\|Q\|=1$ и $\operatorname{Im} Q = Y$ в X. При этом в X^* такой единственный проектор P может существовать даже тогда, когда в X вообще не найдется проектора Q с $\operatorname{Im} Q = Y$. Это так, например, если $X = \ell_\infty \supset c_0 = Y$ (существование единственного проектора P в X^* в этом случае вытекает из следствия I).

Непосредственно проверяется, что верна следующая

Лемма. Если линейный непрерывный оператор $\varkappa$ из Y^* в X^* удовлетворяет условиям $\|\varkappa\| \leq 1$ и (I), то $P = \varkappa i^*$ является линейным непрерывным проектором в X^* с $\|P\| = 1$ и $\operatorname{Ker} P = Y^\perp$, а $i^* \varkappa$ – единичным оператором в Y^*.

Теорема I. Если Y обладает свойством SU в X, то существует один и только один линейный непрерывный оператор $\varkappa$ из Y^* в X^*, удовлетворяющий условиям $\|\varkappa\| \leq 1$ и (I). При этом $\varkappa$ есть изометрический изоморфизм из Y^* в X^* и выполняется условие (2).

Доказательство. Так как Y обладает свойством SU в X, то существует изометрический изоморфизм $\varkappa$ из Y^* в X^*, удовлетворяющий условиям (I) и (2). Пусть $\varkappa_1$ – линейный непрерывный оператор из Y^* в X^*, удовлетворяющий условиям $\|\varkappa_1\| \leq 1$ и (I). В силу леммы и следствия I, $\varkappa i^* = \varkappa_1 i^*$. Поэтому, ввиду леммы, $\varkappa = \varkappa i^* \varkappa = \varkappa_1 i^* \varkappa = \varkappa_1$.

Пусть теперь Y – нормированное пространство, i обозначает каноническое вложение пространства Y в Y^{**}, а Y отождествляется с $\operatorname{Im} i$. Через j обозначим каноническое вложение Y^* в Y^{***}. Отметим, что $f - j i^* f \in Y^\perp$, $f \in Y^{***}$. Учитывая и то, что Y обладает в Y^{**} свойством SU тогда и только тогда, когда Y обладает в Y^{**} свойством U [3], получаем из теоремы I

Следствие 2. Пусть Y обладает свойством U в Y^{**}. Тогда Y^* удовлетворяет следующему условию еднственности канонического вложения:

(E) Если для линейного непрерывного оператора $\varkappa$ из Y^* в Y^{***} выполняются условия $\|\varkappa\| \leq 1$ и $f - \varkappa i^* f \in Y^\perp$, $f \in Y^{***}$, то $\varkappa = j$.

Если Y обладает свойством SU в X, то теоремой I паре X, Y сопоставляется единственным образом оператор $\varkappa$. Следующий результат дает возможность определить $\varkappa$ в виде предела сети операторов (такая возможность была использована в [2] для установления разложимости X^* в прямую сумму аннулятора $Y^\perp$ и подпространства, изометрически изоморфного Y^*).

Теорема 2. Предположим, что не существует более одного линейного непрерывного оператора $\varkappa$ из Y^* в X^*, удовлетворяющего условиям $\|\varkappa\| \leq 1$ и (I). Если сеть (S_β) линейных непрерывных операторов из Y^* в X^* удовлетворяет условиям $\sup_\beta \|S_\beta\| \leq 1$ и

$$\lim_{\beta}(S_\beta g)(y) = g(y) \quad \forall y \in Y, \quad \forall g \in Y^*, \tag{3}$$

то вышеупомянутый оператор $\varkappa$ существует и определяется равенством

$$(\varkappa g)(x) = \lim_{\beta}(S_\beta g)(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall g \in Y^*. \tag{4}$$

Доказательство. Известно (см., например, [5], стр. 230), что пространство всех линейных непрерывных операторов из произвольного нормированного пространства Z в X^* канонически изометрически изоморфно $(X \hat{\otimes} Z)^*$. Поэтому мы можем рассматривать сеть (S_β) в единичном шаре B сопряженного пространства $(X \hat{\otimes} Y^*)^*$. Так как B является $*$-слабо компактным (согласно теореме Алаоглу-Бурбаки), то (S_β) обладает в нем $*$-слабой предельной точкой, которая отождествима с некоторым линейным непрерывным оператором $\varkappa$ из Y^* в X^*, удовлетворяющим условию $\|\varkappa\| \leq 1$.

Рассмотрим теперь произвольную $*$-слабую предельную точку сети (S_β), принадлежащую B. Она отождествима с некоторым линейным непрерывным оператором S из Y^* в X^*, удовлетворяющим условию $\|S\| \leq 1$. Покажем, что S удовлетворяет условию (I). Пусть подсеть $(S_{\beta(\alpha)})$ сети (S_β) $*$-слабо сходится к S. Тогда при всех $x \in X$, $g \in Y^*$

$$\lim_{\alpha}(S_{\beta(\alpha)} g)(x) = (Sg)(x),$$

значит в силу (3) имеем

$$g(y) = (Sg)(y) \quad \forall y \in Y, \quad \forall g \in Y^*.$$

Рассмотрим произвольные $f \in X^*$ и $y \in Y$. Пусть $g = i^* f$. Тогда

$$(f - S i^* f)(y) = f(y) - (Sg)(y) = g(y) - g(y) = 0,$$

так что (I) выполняется.

Таким образом, $\varkappa$ удовлетворяет условию (I) и, если учитывать также предположение теоремы, является единственной $*$-слабой предельной точкой сети (S_β) в B. Поэтому (S_β) сходится к $\varkappa$ в $*$-слабой топологии пространства $(X \hat{\otimes} Y^*)^*$, так что имеет место равенство (4).

Теорема доказана.

Замечание 3. Пусть $S_\beta = V_\beta^*$, где (V_β) – сеть из теоремы I статьи [2], причем здесь V_β рассматриваются как операторы, действующие из X в Y. Теорема 2 показывает, что в условии (5) из [2] сходится в действительности сеть (V_β), а не только ее подсеть.

Следствие 3. Пусть Y – такое нормированное пространство, что Y^* удовлетворяет условию (E) (из следствия 2). Если сеть (T_β) линейных непрерывных операторов в Y^* удовлетворяет условиям $\sup_\beta \|T_\beta\| \leq 1$ и

$$\lim_\beta (T_\beta g)(y) = g(y) \quad \forall y \in Y,\ \forall g \in Y^*,$$

то (T_β) сходится к единичному оператору I_{Y^*} в слабой операторной топологии.

Для доказательства достаточно в теореме 2 положить $X = Y^{**}$ и $S_\beta = j\,T_\beta$.

2. Полученные результаты можно применять в теории базисов и шаудеровых разложений. Хорошо известно (см., например, [4], стр. 621), что в любом банаховом пространстве имеет место теорема о слабом базисе: всякий слабый базис является базисом. Пусть Y – нормированное пространство. Напомним (см., например, [10], стр. 145), что последовательность (e_n) в Y^* называется $*$-слабым базисом пространства Y^*, если (e_n) является базисом для Y^* как локально выпуклого пространства, наделенного $*$-слабой топологией $\sigma(Y^*, Y)$, т.е. если для каждого элемента $g \in Y^*$ найдется единственная последовательность чисел $(a_k(g))$, для которой

$$g(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(g)\, e_k(y) \qquad \forall y \in Y.$$

Будем называть $*$-слабый базис (e_n) монотонным, если при всех $g \in Y^*$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k(g)\, e_k \Big\| \leq \|g\|.$$

Будем говорить, что в Y^* имеет место теорема о монотонном $*$-слабом базисе, если всякий монотонный $*$-слабый базис пространства Y^* является базисом.

Теорема о монотонном $*$-слабом базисе в произвольном Y^*, вообще говоря, место не имеет. Так например, $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, ... образуют монотонный $*$-слабый базис в пространстве $l_1^* = l_\infty$. В то же время l_∞, будучи несепарабельным, базисом не обладает (l_∞ не обладает даже шаудеровым разложением (см., например, [11] стр. 494)).

Следствие 4. Пусть Y – такое нормированное пространство, что Y^* удовлетворяет условию (E). Тогда в Y^* имеет место теорема о монотонном $*$-слабом базисе.

Доказательство. Применяя следствие 3 к последовательности естественных проекторов, ассоциированной с монотонным $*$-слабым базисом (e_n) в $У^*$, получим, что (e_n) есть слабый базис в $У^*$. Согласно теореме о слабом базисе, (e_n) является базисом в $У^*$.

Для получения более конкретного результата, чем следствие 4, рассмотрим пространство $c_0(\Gamma)$, где Γ -произвольное бесконечное множество индексов. Отметим, что в $c_0(\Gamma)^*$ $*$-слабая и слабая сходимости последовательностей не являются эквивалентными, ибо $c_0(\Gamma)$ не является пространством Гротендика (о пространствах Гротендика см., например, в [5]). Пусть $У$ - подпространство фактор-пространства $c_0(\Gamma)$. (Отметим, что понятия "подпространство фактор-пространства" и "фактор-пространство подпространства" совпадают (см., например, [8], стр. 85).) Известно (см., например, [7]), что $У$ есть M-идеал в $У^{**}$, т.е. $У^{\perp}$ имеет такое дополнение G в $У^{***}$, что при всех $f=g+h \in У^{***}$, $g\in G$, $h\in У^{\perp}$, выполняется равенство $\|f\|=\|g\|+\|h\|$. Ясно, что $У$ обладает свойством SU, а значит, и свойством U в $У^{**}$. Поэтому, в силу следствия 2, $У^*$ удовлетворяет условию (E) и согласно следствию 4 имеем

Следствие 5. Пусть $У$ - подпространство фактор-пространства $c_0(\Gamma)$. Если в $У^*$ существует монотонный $*$-слабый базис (e_n), то (e_n) является также базисом в $У^*$.

Замечание 4. Все вышесказанное естественном образом распространяется на шаудеровы разложения: если $У^*$ удовлетворяет условию (E) (например, если $У$ - пространство из следствия 5), то в $У^*$ имеет место теорема о монотонном $*$-слабом разложении: всякое монотонное $*$-слабое разложение пространства $У^*$ является шаудеровым разложением.

Замечание 5. Требование монотонности $*$-слабого базиса в следствии 5 (значит, и в теореме о монотонном $*$-слабом базисе) существенно. Например, $e_1=(1,-1,0,0,\dots)$, $e_2=(0,1,-1,0,0,\dots)$, $e_3=(0,0,1,-1,0,0,\dots)$, ... образуют $*$-слабый базис в $\ell_1=c_0^*$, поскольку (e_n) есть сопряженная система к базису $(1,0,0,\dots)$, $(1,1,0,0,\dots)$, $(1,1,1,0,0,\dots)$, ... пространства c_0, но (e_n) не является монотонным, поскольку для $g=(1,0,0,\dots)\in\ell_1$ имеем $\|a_1(g)e_1\|=\|e_1\|=2$, а $\|g\|=1$. Система (e_n) не является базисом в ℓ_1, так как $g=(1,0,0,\dots)$ не принадлежит замкнутой линейной оболочке системы (e_n) (последний факт ясен из того, что для функционала $F \in \ell_1^*$, $F(\xi_k) = \Sigma\, \xi_k$, имеем $F(g) = 1$ и $F(e_n) = 0$ при всех n).

Пусть Y - банахово пространство. Известно (см.,например,[II], стр. 476), что существование базиса в Y^* влечет за собой существование базиса также в Y. В то же время проблема I3.2 а) из [I0], стр. I5I (см. также [II], стр. 52I) - обладает ли Y базисом, если Y^* обладает $*$-слабым базисом? - остается пока нерешенным. В силу следствия 4,эта проблема решается утвердительно для Y^* со свойством (E) при дополнительном предположении о монотонности $*$-слабого базиса. Последний результат не вытекает из ранее известных результатов, что вышеупомянутая проблема решается утвердительно в случае $*$-слабого шаудерова базиса (см.[I0], стр. I55), а также тогда, когда Y является сепарабельным (см. [II], стр. 476). В самом деле, этот результат применим,например, к монотонному $*$-слабому базису в $c_0^* = \ell_1$, не являющемуся $*$-слабым шаудеровым базисом, который описывается в примере I4.I из [I0], стр. I53, а также к несепарабельному $Y = c_0(\Gamma)$, где Γ - несчетное множество индексов.

Литература

I. Одинец В.П. Об условиях единственности проектора с единичной нормой//Матем. заметки, I977. Т. 22. № I.С. 45-49.
2. Оя Э. О единственности продолжения линейных непрерывных функционалов по теореме Хана-Банаха// Изв. АН ЭССР, Сер. физ., мат. I984. Т. 33. № 4. С. 424-438.
3. Оя Э. Сильная единственность продолжения линейных непрерывных функционалов по теореме Хана-Банаха// Матем. заметки, I988. Т. 43. № 2. С. 237-246.
4. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения// М.: Мир, I969.
5. Diestel J., Uhl J. J., Jr. Vector measures// Math. Surveys, N° 15. Amer. Math. Soc., Providence: Rhode Island, 1977.
6. Godefroy G., Saphar P.D. Normes lisses et propriété d'approximation métrique// C. r. Acad. sci. Paris. 1984. T. 299, sér. I. N° 15. P. 753-756.

7. Harmand P., Lima Å. Banach spaces which are M-ideals in their biduals// Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 283. N° 1. P. 253-264.
8. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces.I. Sequence spaces// Berlin-Heidelberg - N.Y.: Springer-Verlag, 1977.
9. Phelps R. R. Uniqueness of Hahn-Banach extensions and unique best approximation// Trans. Amer. Math. Soc.1960. V. 95. N° 2. P. 238-255.
10. Singer I. Bases in Banach spaces. I// Berlin-Heidelberg - N.Y.: Springer-Verlag, 1970.
11. Singer I. Bases in Banach spaces. II// Berlin-Heidelberg - N.Y.: Springer-Verlag, 1981.

Поступило 10.06.88

STRONG UNIQUENESS OF MINIMAL EXTENSION OF LINEAR CONTINUOUS FUNCTIONALS AND MONOTONE WEAK* BASIS THEOREM

E. Oja

Summary

Let X be a normed linear space and $Y \subset X$ be a linear subspace. We shall say that Y has the property SU (strong uniqueness property) if its annihilator $Y^{\perp}$ is complemented in X^* by a subspace G such that whenever $g \in G$ and $h \in Y^{\perp}\setminus\{0\}$ then $\|g+h\|>\|g\|$. In [3] we have proved that Y has the property SU if and only if there exists an isometrical isomorphism $\varkappa$ from Y^* into X^* such that

$$f - \varkappa f|_Y \in Y^{\perp} \qquad \forall f \in X^* \tag{1}$$

and

$$\|f\| > \|f|_Y\| \quad \text{if} \quad f \in X^* \quad \text{and} \quad f \neq \varkappa f|_Y .$$

The following main results deal with the uniqueness and the construction of $\varkappa$.

<u>Theorem 1.</u> If Y has the property SU then there is one and only one linear continuous operator $\varkappa : Y^* \to X^*$ which satisfies $\|\varkappa\| \leq 1$ and (1).

<u>Theorem 2.</u> Suppose that there is not more than one linear continuous operator $\varkappa : Y^* \to X^*$ which satisfies $\|\varkappa\| \leq 1$

and (1). If there is a net (S_β) of linear continuous operators from Y^* into X^* satisfying $\sup_\beta \|S_\beta\| \leq 1$ and

$$\lim_\beta (S_\beta g)(y) = g(y) \quad \forall y \in Y, \ \forall g \in Y^*,$$

then the operator $\mathcal{H}$ exists and is defined by

$$(\mathcal{H} g)(x) = \lim_\beta (S_\beta g)(x) \quad \forall x \in X, \ \forall g \in Y^*.$$

Let (e_n) be a weak* basis in X^*. We shall say that (e_n) is monotone if for every $f = w^*\text{-}\lim_n \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \in X^*$ we have

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \Big\| \leq \|f\| \quad (n=1, 2, \dots).$$

From theorems 1 and 2 it follows that every monotone weak* basis of X^* is a basis of X^* if X has the property SU in X^{**} (cf. corollary 4).

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989, 846,50-60

О СТРУКТУРЕ ПОЛЕЙ λ-СУММИРУЕМОСТИ МАТРИЦ

Т. Лейгер

Тартуский государственный университет

Теория суммируемости с заданной скоростью λ (коротко, λ-суммируемости), основанная Г.Кангро [2, 3, 4], имеет важные приложения в теории приближения функций, тауберовых теорем и других областях математического анализа. Применение методов функционального анализа к изучению проблем λ-суммируемости обеспечивается наличием в поле λ-суммируемости c_A^λ матрицы A линейно-топологической структуры (см. [3]). Целью настоящей статьи является дальнейшее изучение структуры c_A^λ. Следуя идеям теории "обычной" суммируемости, определим и исследуем т.н. отличительные подпространства в c_A^λ.

Изучение отличительных подпространств поля суммируемости c_A началось в 1952-ом году в работах Виланского [8] и Целлера [13]. С тех пор эта тематика находится в центре внимания общей теории суммируемости, ибо она связана со многими существенными проблемами суммирования (например, заменимость, совместность и совершенность методов суммирования). Подробное и систематическое изложение этих вопросов имеется в монографиях Бооса [7] и Виланского [11].

Отметим, что все доказываемые ниже результаты об отличительных подпространствах в c_A^λ имеют соответствующие аналоги в теории "обычной" суммируемости. Их можно найти в указанных выше монографиях, а также, например, в [9].

§ 1. Основные понятия и обозначения

1. Пусть $A := (a_{nk})$ - бесконечная числовая матрица. Для числовой последовательности $x = (x_k)$ обозначим[1]

$$y_n := \sum_k a_{nk} x_k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

[1] Коротко обозначается $\sum_k := \sum_{k=0}^{\infty}$. В настоящей статье $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$.

Поле суммируемости

$$c_A := \{x = (x_k) \ : \ \exists \lim_n y_n =: \eta\}$$

матрицы A является FK-пространством, топология которого определяется семейством полунорм

$$p_n(x) := |x_n| + \sup_m |\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k| \quad (n\in \mathbb{N}), \quad (1)$$

$$p_A(x) := \sup_n |y_n|,$$

а $f\in c_A'$ в точности тогда, когда[2]

$$f(x) = \mu\eta + \sum_n \tau_n y_n + \sum_k \alpha_k x_k \quad (x\in c_A), \quad (2)$$

где $\tau := (\tau_n)\in \ell$ и $\alpha := (\alpha_k)\in c_A^{\beta}$ ([12]). Матрица называется консервативной, если

$$c_A \supset c := \{x = (x_k) \ : \ \exists \lim_k x_k =: \xi\}.$$

Пусть $e^{(k)} := (\delta_{ki}) \in c_A$, это значит, что существует $\lim_n a_{nk} =: a_k$ $(k\in\mathbb{N})$. При изучении структуры поля суммируемости c_A важную роль играют следующие т.н. отличительные подпространства:

$$I_A := \{x\in c_A \ : \ \text{ряд } \sum_k a_k x_k \text{ сходится}\},$$

$$\Lambda_A^{\perp} := \{x\in I_A \ : \ \Lambda_A(x) = 0\}, \text{ где } \Lambda_A(x) := \eta - \sum_k a_k x_k,$$

$$L_A := \{x\in c_A \ : \ \text{ряд } \sum_k \sum_n \tau_n a_{nk} x_k \text{ сходится для } \tau\in\ell\},$$

$$B_A := \{x\in c_A \ : \ \sup_{n,m} |\sum_{k=0}^{m} a_{nk} x_k| < \infty\},$$

$$F_A := \{x\in c_A \ : \ \text{ряд } \sum_k x_k f(e^{(k)}) \text{ сходится для } f\in c_A'\},$$

$$W_A := \{x\in F_A \ : \ f(x) = \sum_k x_k f(e^{(k)}) \text{ для } f\in c_A'\},$$

$$S_A := \{x\in c_A : \ x = \sum_k x_k e^{(k)} \text{ в } FK\text{-пространстве } c_A\}.$$

Известно (см., например,[9]), что

$$S_A \subset W_A = L_A \cap \Lambda_A^{\perp} \subset W_A \oplus \langle u\rangle = F_A = L_A \cap I_A \subset L_A = B_A,$$

где $\langle u\rangle$ – одномерное подпространство, определенное элементом $u\in F_A$. Очевидно, $x\in B_A$ в точности тогда, когда отрезки

$$x^{[m]} := (x_0, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots) \qquad (m\in\mathbb{N})$$

---

[2]Через X' обозначается сопряженное пространство топологического векторного пространства X. Далее, $\ell := \{x = (x_k) : \sum_k |x_k| < \infty\}$. Для множества E последовательностей обозначается $E^{\beta} := \{x = (x_k) : \text{ ряд } \sum_k z_k x_k \text{ сходится для } z\in E\}$ и $E^{\gamma} := \{x = (x_k) : \sup_n |\sum_{k=0}^{n} z_k x_k| < \infty \text{ для } z\in E\}$.

ограничены в c_A. Другими словами[3], $B_A = (c_A)_{AB} \cap c_A$.

2. Пусть $\lambda := (\lambda_k)$, $0 < \lambda_k \uparrow \infty$. Последовательность $x \in c$ называется λ-сходящейся, если существует предел $\lim_k \beta_k =: \beta$, где $\beta_k := \lambda_k(x_k - \xi)$ $(k \in \mathbb{N})$. Множество c^λ всех λ-сходящихся последовательностей — BK-пространство с нормой $\|x\| = \sup_k\{|\beta_k|, |\xi|\}$, а $c^\lambda \cap c_0$ суть его замкнутое подпространство. Заметим, что последовательности $e^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$, $e^\lambda := (1/\lambda_k)$ принадлежат $c^\lambda \cap c_0$, а $e := (1, 1, \dots) \in c^\lambda \setminus c_0$.

Для матрицы A поле λ-суммируемости

$$c_A^\lambda := \{x \in c_A : \exists \lim_n \gamma_n(x) =: \gamma(x)\},$$

где $\gamma_n(x) := \lambda_n(y_n - \eta)$ $(n \in \mathbb{N})$ является FK-пространством, топологию которого определяют полунормы p_n (см. (I)) и

$$p_A^\lambda(x) := \sup_n\{|\gamma_n(x)|, |\eta|\}.$$

Функционал f принадлежит $c_A^{\lambda\prime}$ в точности тогда, когда

$$f(x) = h\eta + l\gamma + \sum_n d_n \gamma_n(x) + \sum_k t_k x_k \quad (x \in c_A^\lambda), \quad (3)$$

где $d := (d_n) \in l$ и $t := (t_k) \in (c_A^\lambda)^\beta$ ([3]).

Матрица A называется λ-консервативной, если $c^\lambda \subset c_A^\lambda$. Для λ-консервативности необходимы и достаточны условия I) $e \in c_A^\lambda$, 2) $\sum_k |a_k|/\lambda_k < \infty$, 3) матрица $\mathfrak{A} := (\alpha_{nk})$ с

$$\alpha_{nk} := \frac{\lambda_n(a_{nk} - a_k)}{\lambda_k} \quad (k, n \in \mathbb{N})$$

консервативна ([3], лемма 3). Так как для консервативной матрицы $\mathfrak{A}$ существуют пределы

$$\alpha_k := \lim_n \alpha_{nk} \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad \alpha := \lim_n \sum_k \alpha_{nk},$$

а $\sum_k |\alpha_k| < \infty$ (см., например, [I], стр. I3), то можно определить $\chi(\mathfrak{A}) := \alpha - \sum_k \alpha_k$. При $\chi(\mathfrak{A}) = 0$ λ-консервативная матрица A называется λ-конулевой, в противном случае — λ-корегулярной ([3], определение I).

В дальнейшем для матрицы A будем предполагать, что $\operatorname{linspan}\{e^{(k)} : k \in \mathbb{N}\} =: \varphi \subset c_A^\lambda$. Это значит, что существуют пределы a_k и α_k $(k \in \mathbb{N})$.

§ 2. Подпространства L_A^λ и B_A^λ

При применении методов функционального анализа к исс-

[3] Через X_{AB} обозначается множество всех последовательностей, отрезки которых ограничены в FK-пространстве X.

ледованию проблем суммируемости наиболее эффективным инструментом служит общая форма (2) непрерывного линейного функционала в c_A. В связи с этим важно знать, для каких $x \in c_A$ во втором слагаемом $\sum_n \tau_n \sum_k a_{nk} x_k$ можно изменить порядок суммирования, т.е. когда выполняется равенство

$$\sum_k \sum_n \tau_n a_{nk} x_k = \sum_n \tau_n \sum_k a_{nk} x_k$$

при всех $\tau \in \ell$. Оказывается ([9], лемма 4.2), что для этого необходимо и достаточно, чтобы $x \in L_A$.

Исходя с аналогичных соображений, определим для матрицы A подмножество

$L_A^\lambda := \{x \in c_A^\lambda :$ ряды

$$\sum_n d_n \sum_k \lambda_k a_{nk} x_k, \tag{4}$$

$$\sum_k \sum_n d_n \lambda_k a_{nk} x_k \tag{5}$$

сходятся и равенство

$$\sum_k \sum_n d_n \lambda_k a_{nk} x_k = \sum_n d_n \sum_k \lambda_k a_{nk} x_k \tag{6}$$

выполняется для всех $d \in \ell\}$.

Согласно этому определению, из условия $x \in L_A^\lambda$ вытекает сходимость ряда $\sum_k a_k x_k$. Поэтому сходится и ряд $\sum_n d_n \lambda_n \cdot (\sum_k a_{nk} x_k - \sum_k a_k x_k)$, откуда в силу условия $\lambda_n \uparrow \infty$ следует, что $\lim_n (\sum_k a_{nk} x_k - \sum_k a_k x_k) = 0$. В итоге

$$L_A^\lambda \subset \Lambda_A^\lambda \subset I_A. \tag{7}$$

Наряду с L_A^λ будем рассматривать подпространство

$$B_A^\lambda := \{x \in c_A^\lambda : \sup_{n,m} |\sum_{k=0}^m \lambda_k a_{nk} x_k| < \infty\}.$$

Легко убедиться, что отрезки $x^{[m]}$ $(m \in \mathbb{N})$ последовательности x ограничены в c_A^λ в точности тогда, когда $\sup_m p_A^\lambda(x^{[m]}) < \infty$, т.е. когда

$$\sup_{n,m} \{|\sum_{k=0}^m \lambda_k a_{nk} x_k|, |\sum_{k=0}^m a_k x_k|\} < \infty.$$

Таким образом,

$$(c_A^\lambda)_{AB} \cap c_A^\lambda = B_A^\lambda \cap \{(a_k)\}^\gamma. \tag{8}$$

Установление соотношений между подпространствами L_A^λ и B_A^λ мы начнем с доказательства включения $L_A^\lambda \subset B_A^\lambda$. Для этого докажем следующее более сильное утверждение: если ряд (5) сходится при всех $d \in \ell$, то $x \in B_A^\lambda$.

Рассмотрим в BK-пространстве ℓ функционалы

$$f_m(d) := \sum_{k=0}^{m} \sum_n d_n \lambda_k \alpha_{nk} x_k \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Тогда $f_m \in \ell'$ и

$$\|f_m\| = \sup_n \left| \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \alpha_{nk} x_k \right| \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Последовательность (f_m) сходится всюду в ℓ, поэтому $\|f_m\| = O(1)$, т.е. $x \in B_A^\lambda$.

Из включений $L_A^\lambda \subset B_A^\lambda$, $L_A^\lambda \subset I_A \subset \{(a_k)\}^{\varkappa}$ и равенства (8) следует, что

$$L_A^\lambda \subset (c_A^\lambda)_{AB} \cap c_A^\lambda \subset B_A^\lambda. \tag{9}$$

Теперь докажем включение

$$B_A^\lambda \cap I_A \subset L_A^\lambda. \tag{10}$$

Для $x \in B_A^\lambda \cap I_A$ обозначим

$$u_{nm} := \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \alpha_{nk} x_k \qquad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Согласно определению B_A^λ существует такое число $M > 0$, что $|u_{nm}| \leq M$ $(n, m \in \mathbb{N})$. Перейдя в последнем неравенстве к пределу в процессе $m \to \infty$, получаем неравенство

$$\left| \sum_k \lambda_k \alpha_{nk} x_k \right| \leq M \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

из которого вытекает сходимость ряда (4) при всех $d \in \ell$. Ввиду равномерной по m сходимости ряда $\sum_n d_n u_{nm}$, отсюда следует, что

$$\sum_n d_n \sum_k \lambda_k \alpha_{nk} x_k = \sum_n d_n \lim_m u_{nm}$$

$$= \lim_m \sum_n d_n u_{nm} - \lim_m \sum_{k=0}^{m} \sum_n d_n \lambda_k \alpha_{nk} x_k$$

$$= \sum_k \sum_n d_n \lambda_k \alpha_{nk} x_k.$$

Таким образом, $x \in L_A^\lambda$.

Из включений (7), (9) и (10) следует

Предложение 1. Выполняются равенства

$$L_A^\lambda = B_A^\lambda \cap I_A = B_A^\lambda \cap \Lambda_A^\perp.$$

Из предложения 1 вытекает, что при $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ $L_A^\lambda = (c_A^\lambda)_{AB} \cap c_A^\lambda = B_A^\lambda$.

§ 3. Подпространства F_A^λ и W_A^λ

Для матрицы A положим

$$I_A^\lambda := \{x \in c_A^\lambda : \text{ряд } \sum_k \lambda_k \alpha_k x_k \text{ сходится}\},$$

$\Gamma_A^{\lambda\perp} := \{x \in I_A^\lambda : \Gamma_A^\lambda(x) = 0\}$, где $\Gamma_A^\lambda(x) := \gamma(x) - \sum_k \lambda_k \alpha_k x_k$,

$F_A^\lambda := \{x \in c_A^\lambda :$ ряд $\sum_k x_k f(e^{(k)})$ сходится для $f \in c_A^{\lambda'}\}$,

$W_A^\lambda := \{x \in F_A^\lambda : f(x) = \sum_k x_k f(e^{(k)})$ для $f \in c_A^{\lambda'}\}$.

Ясно, что $F_A^\lambda \subset (c_A^\lambda)_{AB} \cap c_A^\lambda \subset B_A^\lambda$. Далее, вследствие монотонности FK-топологий и включения $c_A^\lambda \subset c_A$ имеем $F_A^\lambda \subset F_A \subset I_A$. В итоге

Пусть $f \in c_A^{\lambda'}$ тогда из (3) следует

$$f(e^{(k)}) = h a_k + l\lambda_k\alpha_k + \sum_n d_n \lambda_k \alpha_{nk} + t_k \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (11)$$

Для каждого $x \in L_A^\lambda$ учитывая (6), имеем

$$\begin{aligned}\sum_k x_k f(e^{(k)}) &= h\sum_k a_k x_k + l\sum_k \lambda_k \alpha_k x_k \\ &\quad + \sum_k\sum_n d_n \lambda_k \alpha_{nk} x_k + \sum_k t_k x_k \\ &= h\eta + l\sum_k \lambda_k\alpha_k x_k + \sum_n d_n \sum_k \lambda_k \alpha_{nk} x_k + \sum_k t_k x_k.\end{aligned}$$

Таким образом, ряд $\sum_k x_k f(e^{(k)})$ сходится в точности тогда, когда сходится ряд $\sum_k \lambda_k \alpha_k x_k$. Мы доказали

Предложение 2. Выполняется равенство $F_A^\lambda = L_A^\lambda \cap I_A^\lambda$.

Рассмотрим теперь подпространство W_A^λ. Так как $\gamma \in c_A^{\lambda'}$, то для $x \in W_A^\lambda$

$$\gamma(x) = \sum_k x_k \gamma(e^{(k)}) = \sum_k \lambda_k \alpha_k x_k, \quad (12)$$

следовательно, $W_A^\lambda \subset \Gamma_A^{\lambda\perp}$. Таким образом,

$$W_A^\lambda \subset F_A^\lambda \cap \Gamma_A^{\lambda\perp} \subset L_A^\lambda \cap \Gamma_A^{\lambda\perp}.$$

Обратно, пусть $x \in L_A^\lambda \cap \Gamma_A^{\lambda\perp}$, тогда справедливы равенства (6) и (12), а $\Lambda_A(x) = 0$ в силу включения (7). Поэтому

$$\begin{aligned}f(x) &= h\sum_k a_k x_k + l\sum_k \lambda_k \alpha_k x_k + \sum_k\sum_n d_n \lambda_k \alpha_{nk} + \sum_k t_k x_k \\ &= \sum_k x_k f(e^{(k)}),\end{aligned}$$

т.е. $x \in W_A^\lambda$. Итак, справедливо следующее предложение, которое было доказано Г.Кангро ([3], теорема I).

Предложение 3. Выполняется равенства

$$W_A^\lambda = L_A^\lambda \cap \Gamma_A^{\lambda\perp} = F_A^\lambda \cap \Gamma_A^{\lambda\perp}.$$

Отметим, что так как функционал Γ_A^λ определен в точности в подпространстве I_A^λ, то $\operatorname{codim} \Gamma_A^{\lambda\perp} \leq 1$ в I_A^λ, т.е. $I_A^\lambda = \Gamma_A^{\lambda\perp} \oplus \langle v \rangle$, где $v \in I_A^\lambda$. Из предложения 3 вытекает, что

$$F_A^\lambda = W_A^\lambda \oplus \langle v\rangle\,, \quad v\in F_A^\lambda. \tag{13}$$

§ 4. λ-конулевые и λ-корегулярные матрицы

Пусть A — λ-консервативная матрица, т.е. $c^\lambda \subset c_A^\lambda$. Сначала заметим, что в этом случае $e^\lambda \in L_A^\lambda$. В самом деле в силу консервативности матрицы $\mathfrak{A}$,

$$\left|\sum_{k=0}^{m} \alpha_{nk}\right| \leq \sum_k |\alpha_{nk}| = O(1).$$

(см., например, [I], стр. 13), т.е. $e^\lambda \in B_A^\lambda$. Далее, известно ([3], лемма 3), что при $\lambda_k \uparrow \infty$

$$a^\lambda := \lim_n \sum_k a_{nk}/\lambda_k = \sum_k a_k/\lambda_k\,,$$

значит, $e^\lambda \in \Lambda_A^\perp$. Согласно предложению I, $e^\lambda \in L_A^\lambda$. Следовательно, $e^\lambda \in W_A^\lambda$ в точности тогда, когда $e^\lambda \in \Gamma_A^{\lambda\perp}$, т.е. когда $\chi(e^\lambda) = \sum_k \alpha_k$. С другой стороны, $\chi(e^\lambda) = \alpha$. Таким образом, $e^\lambda \in W_A^\lambda$ в точности тогда, когда $\chi(\mathfrak{A}) = 0$. Мы установили следующий результат, впервые доказанный Г. Кангро ([3], следствие 3).

Предложение 4. λ-консервативная матрица A является λ-корегулярной в точности тогда, когда $e^\lambda \notin W_A^\lambda$ в c_A^λ.

Из предложения 4 и равенства (13) следует, что для λ-корегулярной матрицы A выполняется

$$F_A^\lambda = W_A^\lambda \oplus \langle e^\lambda\rangle.$$

Известно (см., например, [II], гл. 14), что для некоторых матриц A (в частности в случае $F_A \neq W_A$) коэффициент μ в (2) для каждого $f \in c_A'$ в отличие от остальных коэффициентов τ_n и α_k, определен однозначно. Это свойство матриц, связанное с различными вопросами суммируемости, изучалось многими авторами ([6, 10] и др.). В теории λ-суммируемости в роли μ выступает коэффициент ℓ в представлении (3).

Предложение 5. Если $F_A^\lambda \neq W_A^\lambda$ (в частности, если A является λ-корегулярной), то коэффициент ℓ в (3) для каждого $f \in c_A^{\lambda\prime}$ определяется однозначно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если из (11) выразить t_k и вставить в (3), то для $f \in c_A^{\lambda\prime}$ получим

$$f(x) = h\eta + \ell\chi(x) + \sum_n d_n \lambda_n \left(\sum_k a_{nk} x_k - \eta\right)$$

$$+\sum_\kappa [f(e^{(\kappa)})-h\alpha_\kappa-\ell\lambda_\kappa\alpha_\kappa-\sum_n d_n\lambda_\kappa\alpha_{n\kappa}]x_\kappa .$$

Отсюда для $x\in F_A^\lambda$, учитывая предложения 2, заключим

$$f(x) = h\Lambda_A(x)+\ell\Gamma_A^\lambda(x)+\sum_\kappa x_\kappa f(e^{(\kappa)}). \qquad (14)$$

Пусть $F_A^\lambda = W_A^\lambda \oplus \langle v\rangle$ с $v\in F_A^\lambda\setminus W_A^\lambda$, обозначим $\sigma := \Gamma_A^\lambda(v)\neq 0$. Из (14) следует, что

$$\ell = \frac{1}{\sigma}[f(v)-\sum_\kappa v_\kappa f(e^{(\kappa)})]-h\Lambda_A(v).$$

§ 5. Подпространство P_A^λ

При описании множества совершенности $\bar c$ в поле суммируемости c_A консервативной матрицы A видную роль играют функционалы $f\in c_A'$ с $\ker f\supset c$. Оказывается, что при $\chi(A)\neq 0$ для таких f в представлении (2) $\mu=0$. Исходя из этого, Виланский (см. [11], гл. 15) назвал такие функционалы пробными функциями. Подпространство

$$P_A := \{x\in c_A : f(x)=0 \text{ для всех пробных функций } f\}$$

содержит L_A, а при $\chi(A)=0$ совпадает с $\bar c$.

Принимая во внимание сказанное, дадим следующие определения.

Функционал $f\in c_A^{\lambda\prime}$ будем называть λ-пробной функцией, если $\ker f\supset\varphi$ и $\ell=0$ в некотором его представлении (3). Множество всех λ-пробных функций обозначим через T_A^λ. Положим

$$P_A^\lambda := \{x\in c_A^\lambda : f(x)=0 \text{ для } f\in T_A^\lambda\},$$

т.е. $P_A^\lambda = \bigcap\{\ker f,\ f\in T_A^\lambda\}$. Отсюда следует, что P_A^λ замкнуто. Непосредственно проверяется, что $L_A^\lambda\subset P_A^\lambda$.

Для дальнейшего исследования подпространства P_A^λ нам понадобится

Лемма 1. Если $L_A^\lambda\neq W_A^\lambda$, то каждый функционал $f\in c_A^{\lambda\prime}$ с $\ker f\supset L_A^\lambda$ является λ-пробной функцией.

Доказательство. Пусть $\ker f\supset L_A^\lambda\supset\varphi$ предположим противное, т.е. что $\ell\neq 0$. Для $x\in L_A^\lambda$ из (3) получим

$$f(x) = h\eta+\ell\gamma(x)+\sum_\kappa\sum_n d_n\lambda_\kappa\alpha_{n\kappa}x_\kappa+\sum_\kappa t_\kappa x_\kappa$$
$$= h\eta+\ell\gamma(x)+\sum_\kappa \sigma_\kappa x_\kappa ,$$

где $\sigma_\kappa := \sum_n d_n\lambda_\kappa\alpha_{n\kappa}+t_\kappa$ $(\kappa\in\mathbb{N})$. Так как $0 = f(e^{(\kappa)}) = h\alpha_\kappa+\ell\lambda_\kappa\alpha_\kappa+\sigma_\kappa$, то $\sigma_\kappa = -h\alpha_\kappa-\ell\lambda_\kappa\alpha_\kappa$ $(\kappa\in\mathbb{N})$ и в силу условия (7), имеем

$$
\begin{aligned}
0 = f(x) &= h\eta + \ell\chi(x) - h\sum_k a_k x_k - \ell\sum_k \lambda_k a_k x_k \\
&= h\,\Lambda_A(x) + \ell\,\Gamma_A^\lambda(x) \\
&= \ell\,\Gamma_A^\lambda(x),
\end{aligned}
$$

откуда получим $\Gamma_A^\lambda(x) = 0$. Таким образом $L_A^\lambda \subset \Gamma_A^{\lambda\perp}$, что противоречит предположению $L_A^\lambda \neq W_A^\lambda$ (см. предложение 3).

Предложение 6. Если $L_A^\lambda \neq W_A^\lambda$, то $P_A^\lambda = \overline{L_A^\lambda}$.

Доказательство. Пусть $f \in c_A^{\lambda\prime}$ произвольный такой функционал, что $\ker f \supset L_A^\lambda$. Согласно лемме I, $f \in T_A^\lambda$, вследствие чего $\ker f \supset P_A^\lambda$. Таким образом, $P_A^\lambda \subset \overline{L_A^\lambda}$ (см., например,[51], теорема 3.5). Из включения $L_A^\lambda \subset P_A^\lambda$ следует $\overline{L_A^\lambda} \subset \overline{P_A^\lambda} = P_A^\lambda$. В итоге $P_A^\lambda = \overline{L_A^\lambda}$.

Предложение 7. Для любой матрицы A с $c_A^\lambda \supset \varphi$ выполняется одно из равенств $P_A^\lambda = \overline{\varphi}$ или $P_A^\lambda = \overline{\varphi} \oplus \langle u \rangle$, где $u \in P_A^\lambda \setminus \overline{\varphi}$.

Доказательство. Из включения $\varphi \subset P_A^\lambda$ следует $\overline{\varphi} \subset \overline{P_A^\lambda} = P_A^\lambda$. Остается показать, что если $\overline{\varphi} \neq P_A^\lambda$, то $P_A^\lambda = \overline{\varphi} \oplus \langle u \rangle$ с $u \in P_A^\lambda \setminus \overline{\varphi}$.

Пусть $u \in P_A^\lambda \setminus \overline{\varphi}$, тогда найдется $f \in c_A^{\lambda\prime}$ со свойствами $\ker f \supset \varphi$ и $f(u) = 1$. Согласно определению подпространства P_A^λ, коэффициент $\ell \neq 0$ во всех представлениях (3) функционала f. Допустим противное, т.е. предположим, что $\overline{\varphi} \oplus \langle u \rangle \neq P_A^\lambda$ Тогда существуют $v \in P_A^\lambda \setminus (\overline{\varphi} \oplus \langle u \rangle)$ и $g \in c_A^{\lambda\prime}$ с $\overline{\varphi} \oplus \langle u \rangle \subset \ker g$ и $g(v) = 1$. Во всех представлениях

$$g(x) = \tilde{h}\eta + \tilde{\ell}\chi(x) + \sum_n \tilde{d}_n \chi_n(x) + \sum_k \tilde{t}_k x_k \quad (x \in c_A^\lambda)$$

коэффициент $\tilde{\ell} \neq 0$. Построим функционал $\tau := \tilde{\ell} f - \ell g$, тогда $\tau \in c_A^{\lambda\prime}$ и

$$
\begin{aligned}
\tau(x) = (\tilde{\ell} h - \ell\tilde{h})\eta + (\tilde{\ell}\ell - \ell\tilde{\ell})\chi(x) + \sum_n (\tilde{\ell} d_n - \ell\tilde{d}_n)\chi_n(x) \\
+ \sum_k (\tilde{\ell} t_k - \ell\tilde{t}_k) x_k .
\end{aligned}
$$

Так как $\tilde{\ell}\ell - \ell\tilde{\ell} = 0$ и $\ker \tau \supset \varphi$, то τ — λ-пробная функция. Но с другой стороны, $\tau(u) = \tilde{\ell} f(u) - \ell g(u) = \tilde{\ell} \neq 0$, хотя $u \in P_A^\lambda$. Полученное противоречие доказывает, что в случае $u \in P_A^\lambda \setminus \overline{\varphi}$ верно равенство $P_A^\lambda = \overline{\varphi} \oplus \langle u \rangle$.

Предложение 8. Если матрица A λ-корегулярна, то $P_A^\lambda = \overline{c^\lambda \cap c_0}$.

Доказательство. Так как $c^\lambda \cap c_0 \subset P_A^\lambda$, то $\overline{c^\lambda \cap c_0} \subset \overline{P_A^\lambda} = P_A^\lambda$. Докажем противоположное включение.

Возьмем такой функционал $f \in c_A^{\lambda\prime}$, что $\ker f \supset c^\lambda \cap c_0$, тогда $\ell = 0$. В самом деле,

$$0 = f(e^\lambda) = h a^\lambda + \ell \chi(e^\lambda) + \sum_n d_n \lambda_n \Big(\sum_k a_{nk}/\lambda_k - a^\lambda\Big) + \sum_k t_k/\lambda_k$$

и

$$0 = \sum_k f(e^{(k)})/\lambda_k = h \sum_k a_k/\lambda_k + \ell \sum_k \alpha_k + \sum_k \sum_n d_n \alpha_{nk} + \sum_k t_k/\lambda_k,$$

откуда $0 = \ell(\chi(e^\lambda) - \sum_k \alpha_k) = \ell \chi(\mathfrak{A})$. Поскольку $\chi(\mathfrak{A}) \neq 0$, то $\ell = 0$. Таким образом, f является λ-пробной функцией. Значит, $\ker f \supset P_A^\lambda$ для всех $f \in c_A^{\lambda\prime}$ с $\ker f \supset c^\lambda \cap c_0$, т.е. $P_A^\lambda \subset c^\lambda \cap c_0$. В итоге равенство $P_A^\lambda = c^\lambda \cap c_0$ доказана.

Г.Кангро [4] назвал λ-консервативную матрицу λ-совершенной, если последовательности $e^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$, e^λ и e составляют в c_A^λ тотальное подмножество. Так как $\operatorname{lin\,span}\{e^{(k)}, e^\lambda : k \in \mathbb{N}\} \subset c^\lambda \cap c_0$ в c_A^λ, то из предложения 8 вытекает

Следствие. λ-корегулярная матрица A является λ-совершенной в точночти тогда, когда $c_A^\lambda = P_A^\lambda \oplus \langle e \rangle$.

Литература

1. Барон С.А. Введение в теорию суммируемости рядов. 2-е изд. - Тлн.: Валгус, 1977. - 280 с.
2. Кангро Г. О множителях суммируемости типа Бора-Харди для заданной скорости. I //Изв. АН ЭстССР. Физ., матем. - 1969. - Т. 18, № 2 - с. 131-146.
3. Кангро Г. О λ-совершенности методов суммирования и ее применения. I //Изв. АН ЭстССР. Физ., матем. - 1971. - Т. 20, № 2 - с. 111-120.
4. Кангро Г. О λ-совершенности методов суммирования и ее применениях. II //Изв. АН ЭстССР. Физ., матем. - 1971. - Т. 20, № 4 - с. 375-385.
5. Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Мир, 1975. - 443 с.
6. Beekmann, W. Über einige limitierungstheoretische Invarianten// Math. Z.- 1976. - Bd. 150. N 2. - S. 195-199.
7. Boos, J. Limitierungstheorie. - Hagen, Fernunivertität--Gesamthochschule, 1983. - 802 S.
8. Wilansky, A. Summability: the inset . The basis in summability space// Duke Math. J. - 1952. - Vol. 19, N 4, - P. 647-660.

9. Wilansky, A. Distinguished subsets and summability invariants// J. d'Analyse math. - 1964. - Vol. 12. - P. 327-350.
10. Wilansky, A. The μ-property of FK-spaces// Commentat. math. Tom. spec. honor. Ladislai Orlicz. T. 1 - Warszawa, 1978. - P. 371-380.
11. Wilansky, A. Summability Through Functional Analysis. - Amsterdam, 1984. - 318 p.
12. Zeller, K. Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren// Math. Z. - 1951. - Bd. 53, N 5. - S. 463-487.
13. Zeller, K. Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren// Math. Z. - 1952. - Bd. 56, N 2 - S. 134-151.

Поступило 12.09.88

STRUKTUR VON λ-WIRKFELDERN VON MATRIZEN

T. Leiger

Zusammenfassung

Es sei $\lambda := (\lambda_k)$ mit $0 < \lambda_k \uparrow \infty$. Eine Folge $x = (x_k)$ heißt λ-konvergent, wenn $\lim_k x_k =: \xi$ und $\lim_k \lambda_k(x_k - \xi)$ existieren. Die Menge c^λ aller λ-konvergenten Folgen zusammen mit der Norm $\|x\| := \sup_k\{\lambda_k|x_k - \xi|, |\xi|\}$ ist ein BK-Raum. Für eine Matrix $A = (a_{nk})$ $(n,k \in \mathbb{N})$ und eine Folge x setzen wir

$$y_n := \sum_k a_{nk} x_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Das λ-Wirkfeld

$$c_A^\lambda := \{x = (x_k) : \exists \lim_n y_n =: \eta,\ \exists \lim_n \lambda_n(y_n - \eta)\}$$

ist ein FK-Raum. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir die ausgezeichneten Teilräume $L_A^\lambda, B_A^\lambda, F_A^\lambda, W_A^\lambda, I_A^\lambda, \Gamma_A^{\lambda+}$ und P_A^λ von c_A^λ die analog zu den bekannten Teilräumen $L_A, B_A, F_A, W_A, I_A, \Lambda_A^-$ und P_A von c_A definiert sind.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989, 846, 61-73

О КОНУЛЕВЫХ И КОРЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦАХ СУММИРОВАНИЯ

Т. Лейгер, К. Плаксо

Введение

Согласно определению Виланского [12], консервативная числовая матрица $A := (a_{nk})$ называется конулевой, если $\chi(A) := \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k \lim_n a_{nk} = 0$, и корегулярной, если $\chi(A) \neq 0$. Оказывается, что по многим свойствам, изучаемым в теории суммируемости, конулевые матрицы отличаются от корегулярных, более близких к регулярным матрицам. Юримяэ [1] указал на топологическое значение этой классификации: матрица A является конулевой в точности тогда, когда отрезки последовательности $e := (1,1,\ldots)$ в поле суммируемости c_A слабо сходятся к e.

В [1] аналогичная классификация вводится в класс всех консервативных операторных матриц $A := (A_{nk})$, где A_{nk} — непрерывные линейные операторы из банахова пространства X в банахово пространство Y $(n,k \in \mathbb{N})$. По аналогии с числовыми матрицами было бы естественно определить понятия конульности и корегулярности при помощи оператора $\chi(A): X \to Y$, где $\chi(A)(\xi) := \lim_n \sum_k A_{nk}(\xi) - \sum_k \lim_n A_{nk}(\xi)$ $(\xi \in X)$. К сожалению, ряд $\sum_k \lim_n A_{nk}(\xi)$, вообще говоря, не сходится в Y, вследствие чего, оператор $\chi(A)$ в общем не определен на всем пространстве X. Поэтому в [1] в качестве определения понятия конульности консервативной матрицы A берется условие о слабой сходимости по отрезкам в точках $e(\xi) := (\xi,\xi,\ldots)$ $(\xi \in X)$ в поле суммируемости $c_A(X)$ (см. также [4]).

При переходе от числовых матриц к операторным многие утверждения теряют силу. Известно ([14], теорема 5.7), что в поле суммируемости c_A корегулярной числовой матрицы A все ограниченные последовательности являются точками прикосновения подпространства c всех сходящихся последовательностей, т.е. $c_A \cap m \subset \bar{c}$. Аналогичное утверждение для корегулярных операторных матриц в общем неверно (см. [3], пример 2). Юримяэ [2] определил класс (Σ) корегулярных операторных матриц A, удовлетворяющих следующему условию (T):

из равенства

$$\lim_m \varphi(\lim_n \sum_k A_{nk}(\xi) - \sum_{k=0}^{m} \lim_n A_{nk}(\xi)) = 0 \quad (\xi \in X)$$

вытекает, что $\varphi = 0$ в Y'.
Оказывается, что для $A \in (\mathfrak{I})$ все ограниченные последовательности в $c_A(X)$ принадлежат замыканию подпространства $c(X)$ всех сходящихся последовательностей пространства X.

В настоящей статье изучается новый вид суммируемости операторными матрицами, обобщающий понятие обычной суммируемости числовыми матрицами, а также суммируемости последовательностями конечнострочных числовых матриц. Для ненулевого $u \in Y$ определяется BK-пространство $c_u(Y) := c_0(Y) \oplus \langle e(u) \rangle$ (см. § 2). Матрица A с $A : c(X) \to c_u(Y)$ называется u-консервативной. Находятся необходимые и достаточные условия для u-консервативности (теорема 3). Оказывается, что u-консервативные матрицы допускают описание конульности и корегулярности при помощи некоторого функционала $\chi(A) \in X'$ (теорема 5). Для корегулярной u-консервативной матрицы A в поле суммируемости $c_{u_A}(X)$ все ограниченные последовательности принадлежат подпространству $c(X)$ и в случае $A \notin (\mathfrak{I})$ (теорема 6). Из названных результатов в § 5 непосредственно получаются соответствующие утверждения для суммируемости числовых последовательностей последовательностями числовых конечнострочных матриц.

§ I. Используемые понятия и факты

Пусть X – банахово пространство с нормой $\| \ \|$, а $\omega(X)$ – векторное пространство всех последовательностей[I] $x = (\xi_k)$ с $\xi_k \in X$ $(k \in \mathbb{N})$. Полное метрическое локально выпуклое пространство $E(X) \subset \omega(X)$ называется FK-пространством, если из сходимости $x_n \to x$ в $E(X)$ следует, что $\xi_k^n \to \xi_k$ $(k \in \mathbb{N})$ в X, где $x_n := (\xi_k^n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Нормированное FK-пространство называется BK-пространством. Например,

$$l(X) := \{x \in \omega(X) : \|x\|_1 := \sum_k \|\xi_k\| < \infty\}$$

является BK-пространством с нормой $\| \ \|_1$, а

$$m(X) := \{x \in \omega(X) : \|x\|_\infty := \sup_k \|\xi_k\| < \infty\},$$

[I] В этой статье $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$, а $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$.

$$c(X) := \{x \in \omega(X) : \exists \lim_k \xi_k =: \lim x\},$$
$$c_0(X) := \{x \in c(X) : \lim x = 0\}$$
суть BK-пространства с нормой $\| \|_\infty$. Каждый элемент $x \in c(X)$ представляется в виде $x = z + e(\xi)$, где $z \in c_0(X)$, $\xi := \lim x$ и $e(\xi) := (\xi, \xi, \ldots)$. Общая форма непрерывного линейного функционала f в $c(X)$ дается формулой

$$f(x) = \varphi(\lim x) + \sum_k \varphi_k(\xi_k), \tag{1}$$

где[2] $\varphi \in X'$, а $(\varphi_k) \in \ell(X')$. Отметим еще, что оператор $\lim : c(X) \to X$ непрерывен и линеен.

Пусть $e_k(\xi) := (0, \ldots, 0, \xi, 0, \ldots)$ с $\xi \in X$ на k-том месте $(k \in \mathbb{N})$. Через $x^{[m]}$ будем обозначать отрезки последовательности x, т.е. $x^{[m]} := \sum_{k=0}^m e_k(\xi_k) = (\xi_0, \ldots, \xi_m, 0, 0, \ldots)$ $(m \in \mathbb{N})$. Пусть $E(X)$ – некоторое FK-пространство с $E(X) \supset \varphi(X) := \operatorname{linspan}\{e_k(\xi) : k \in \mathbb{N}, \xi \in X\}$. Говорят, что в точке $x \in E(X)$ имеет место слабая сходимость по отрезкам, если $f(x) = \sum_k f(e_k(\xi_k))$ для всех $f \in E(X)'$. Часто ставится и проблема об ограниченности отрезков точки $x \in \omega(X)$ в $E(X)$.

Пусть $A := (A_{nk})$ – матрица операторов $A_{nk} \in L(X, Y)$ $(n, k \in \mathbb{N})$, где X и Y – некоторые банаховые пространства. Будем рассматривать матричное преобразование

$$\eta_n := \sum_k A_{nk}(\xi_k) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Через $\omega_A(X)$ обозначаем область определения преобразования (2), т.е. множество всех $x \in \omega(X)$, для которых $A(x) := y := (\eta_n)$ существует. В поле суммируемости

$$c_A(X) := \{x \in \omega_A(X) : \exists \lim_n \eta_n =: \lim_A x\}$$

полунормы

$$p_0(x) := \sup_n \|\eta_n\|,$$
$$p_{n+1}(x) := \|\xi_n\| + \sup_m \|\sum_{k=0}^m A_{nk}(\xi_k)\| \quad (n \in \mathbb{N})$$

определяют FK-топологию, а f принадлежит $c_A(X)'$ в точности тогда, когда

$$f(x) = \mu(\lim_A x) + \sum_n g_n(\eta_n) + \sum_k h_k(\xi_k) \quad (x \in c_A(X)) \tag{3}$$

---

[2] Через M' будем обозначать сопряженное к топологическому векторному пространству M. Для топологических векторных пространств M и N через $L(M, N)$ обозначаем множество всех непрерывных линейных операторов из M в N.

где $\mu \in Y'$, $(q_n) \in \ell(Y)$, $h_k \in X'$ и ряд $\sum_k h_k(\xi_k)$ сходится при всех $x \in \omega_A(X)$ (см. [I]). Легко убедиться, что отрезки точки $x \in \omega(X)$ ограничены в $c_A(X)$ в точности тогда, когда $\sup_m p_0(x^{[m]}) < \infty$, т.е.

$$\sup_{n,m} \| \sum_{k=0}^{m} A_{nk}(\xi_k) \| < \infty .$$

Матрица A называется консервативной, если $c_A(X) \supset c(X)$.

Теорема I (Целлер [I5]). Матрица A консервативна в точности тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\exists \lim_n A_{nk}(\xi) =: a_k(\xi) \qquad (k \in \mathbb{N},\ \xi \in X), \tag{4}$$

$$\exists \lim_n \sum_k A_{nk}(\xi) =: a(\xi) \qquad (\xi \in X), \tag{5}$$

$$\|(A_{nk})\| := \sup \{ \| \sum_{k=0}^{m} A_{nk}(\xi_k) \| : \|\xi_k\| \le 1,\ n,m \in \mathbb{N} \} < \infty . \tag{6}$$

Примечание I. Если A – консервативная матрица, то $a_k, a \in L(X,)$ $(k \in \mathbb{N})$ и (ср. [7], определение 2.I)

$$\|(a_k)\| := \sup \{ \| \sum_{k=0}^{m} a_k(\xi_k) \| : \|\xi_k\| \le 1,\ m \in \mathbb{N} \} < \infty .$$

При этом ряд $\sum_k a_k(\xi_k)$ сходится всюду в $c_0(X)$, хотя $\sum_k a_k(\xi)$, вообще говоря, не сходится. Для всех $x \in c(X)$ (см. [I5])

$$\lim_A x = a(\lim x) + \sum_k a_k(\xi_k - \lim x). \tag{7}$$

В случае $X = \mathbb{K}$ вместо $E(\mathbb{K})$ будем писать E. Например, $c := c(\mathbb{K})$, $m := m(\mathbb{K})$ итд. Элементы числовой матрицы A будем обозначать через a_{nk} $(n, k \in \mathbb{N})$ Отметим (см. [7], теорема 2.7), что числовая матрица A консервативна (т.е. $c_A \supset c$) в точности тогда, когда существуют пределы $\lim_n a_{nk} =: a_k$ $(k \in \mathbb{N})$ и $\lim_n \sum_k a_{nk} =: a$, а $\sum_k |a_{nk}| = O(1)$. При этом $\sum_k |a_k| < \infty$.

§ 2. u-консервативные матрицы

Пусть Y – банахово пространство и u – ненулевой элемент в Y. Обозначим

$$c_u(Y) := \{ y \in \omega(Y) :\ y = z + \lambda e(u),\ z \in c_0(Y),\ \lambda \in \mathbb{K} \}.$$

Ясно, что $c(Y) \supset c_u(Y) \supset c_0(Y)$. Далее,

$$y \in c_u(Y) \iff \lim y = \lambda u , \tag{8}$$

а компоненты z и λ для каждого $y \in c_u(Y)$ определяются однозначно. Таким образом, в $c_u(Y)$ определен функционал

$y \mapsto \lambda$, который будем обозначать буквой λ.

Предложение 2. $c_u(Y)$ является BK-пространством с нормой $\| \|_\infty$.

Доказательство. Достаточно показать замкнутость векторного подпространства $c_u(Y)$ в $c(Y)$. Предположим, что $y_n \in c_u(Y)$ и $y_n \to y$ в $c(Y)$, тогда $y_n = z_n + \lambda_n e(u)$ с $z_n \in c_0(Y)$ и $\lambda_n \in \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ввиду непрерывности оператора $\lim\, c(Y) \to Y$ имеем

$$\lim y = \lim(\lim_n y_n) = \lim_n(\lim y_n) = \lim_n \lambda_n u,$$

т.е. $y \in c_u(Y)$. Тем самым, замкнутость подпространства $c_u(Y)$ в $c(Y)$ доказана.

Очевидно, что $\operatorname{codim} c_0(Y) = 1$ в $c_u(Y)$, поэтому $c_0(Y)$ замкнуто в $c_u(Y)$ и линейный функционал λ непрерывен в $c_u(Y)$, ибо $c_0(Y) = \ker \lambda$. Далее, имея в виду эквивалентность (8), из общей формы (I) функционала $f \in c(Y)'$ получим, что f принадлежит $c_u(Y)'$ в точности тогда, когда

$$f(y) = \mu \lambda(y) + \sum_k \psi_k(\eta_k) \qquad (y := (\eta_k) \in c_u(Y)),$$

где $\mu \in \mathbb{K}$ и $(\psi_k) \in \ell(Y')$.

Пусть теперь X и Y – банаховые пространства и $A_{nk} \in L(X,Y)$ $(n,k \in \mathbb{N})$. Для матрицы A и ненулевого элемента $u \in Y$ обозначим

$$c_{u_A}(X) := \{x \in \omega_A(X) : A(x) \in c_u(Y)\}.$$

Полунормы p_n $(n \in \mathbb{N})$ (см. § I) определяют в $c_{u_A}(X)$ FK-топологию (см.[4], предложение 2.4). Таким образом, $c_{u_A}(X)$ является замкнутым подпространством в FK-пространстве $c_A(X)$.

Обозначая $\lambda_A := \lambda \circ A$ и учитывая, что $A \in L(c_{u_A}(X), c_u(Y))$ (см.[4], предложение 2.7), имеем $\lambda_A \in c_{u_A}(X)'$, а из (8) следует, что

$$x \in c_{u_A}(X) \iff \lim_A x = \lambda_A(x) u. \qquad (9)$$

Отсюда и из представления (3) получим общий вид непрерывного линейного функционала в $c_{u_A}(X)$:

$$f(x) = \mu \lambda_A(x) + \sum_n g_n(\eta_n) + \sum_k h_k(\xi_k) \qquad (x \in c_{u_A}(X)), \quad (10)$$

где $\mu \in \mathbb{K}$, $(g_n) \in \ell(Y')$ и ряд $\sum_k h_k(\xi_k)$ с $h_k \in X'$ $(k \in \mathbb{N})$ сходится при всех $x \in \omega_A(X)$.

Определение I. Матрицу A называем u-консервативной, если $c_{u_A}(X) \supset c(X)$ (т.е. $A: c(X) \longrightarrow c_u(Y)$).

Теорема 3. Матрица A является u-консервативной в точности тогда, когда выполняются условия (4),(5) и (6) с

$$a_k(\xi) = \alpha_k(\xi)u, \qquad a(\xi) = \alpha(\xi)u \qquad (\xi \in X), \tag{II}$$

где $\alpha_k, \alpha \in X'$ $(k \in \mathbb{N})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $A: c(X) \longrightarrow c_u(Y)$, тогда $A: c(X) \longrightarrow c(Y)$, поэтому, согласно теореме I, выполняются условия (4),(5) и (6). Так как $e_k(\xi)$ и $e(\xi)$ принадлежат $c_{u_A}(X)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\xi \in X$, то, обозначая

$$\alpha_k(\xi) := \lambda_A(e_k(\xi)), \qquad \alpha(\xi) := \lambda_A(e(\xi)) \qquad (k \in \mathbb{N}, \xi \in X),$$

имеем (см. (9))

$$a_k(\xi) = \lim\nolimits_A e_k(\xi) = \alpha_k(\xi)\,u \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

$$a(\xi) = \lim\nolimits_A e(\xi) = \alpha(\xi)\,u .$$

Легко убедиться, что операторы e_k и e из X в $c_{u_A}(X)$ непрерывны и линейны, вследствие чего α_k $(k \in \mathbb{N})$ и α принадлежат X'.

Д о с т а т о ч н о с т ь. В силу теоремы I, из условий (4),(5) и (6)) следует, что $A: c(X) \to c(Y)$ Если при этом выполняются равенства (II), то ряд $\sum_k \alpha_k(\xi_k - \lim x)$ сходится для $x \in c(X)$ (см. примечание I) и ввиду формулы(7)

$$\lim\nolimits_A x = [\alpha(\xi) + \sum\nolimits_k \alpha_k(\xi_k - \lim x)]u \qquad (x \in c(X)),$$

т.е. $x \in c_{u_A}(X)$ для всех $x \in c(X)$.

Примечание 2. Если A – u-консервативная матрица, то согласно примечанию I, имеем

$$\sup \{ \| \textstyle\sum_{k=0}^{m} \alpha_k(\xi_k) \| \, \|u\| \cdot \|\xi_k\| \leq 1, m \in \mathbb{N} \} < \infty ,$$

т.е. $\|(\alpha_k)\| < \infty$. Известно ([7], предложение 3.5), что $\|(\varphi_k)\| = \sum_k \|\varphi_k\|$, если φ_k – непрерывные линейные функционалы. Итак, для u-консервативной матрицы A верно условие $\sum_k \|\alpha_k\| < \infty$.

§ 3. Корегулярные и конулевые u-консервативные матрицы

Согласно определению Юримяэ [II], консервативная операторная матрица A называется конулевой, если в поле суммируемости $c_A(X)$ в точках $e(\xi)$ $(\xi \in X)$ имеет место слабая сходимость по отрезкам. В противном случае A называется корегулярной. Имея в виду, что каждая u-консервативная матрица консервативна, а $c_{u_A}(X)$ – замкнутое подпространство в $c_A(X)$ получим что u-консервативная матрица A является конулевой в точности тогда, когда в $c_{u_A}(X)$ в точках $e(\xi)$ $(\xi \in X)$ имеет место слабая сходимость по отрезкам.

В отличие от общих консервативных матриц u-консервативные матрицы допускают описание конульности и при помощи некоторой характеристики $\chi(A) \in X'$. Так как $\sum_k \|\alpha_k\| < \infty$ (см. примечание 2), то

$$\chi(A)(\xi) := \alpha(\xi) - \sum_k \alpha_k(\xi)$$

определено для всех $\xi \in X$. Мы покажем, что $\chi(A) = 0$ в точности тогда, когда A – конулевая матрица. Для этого используем следующее предложение, доказательство которого сообщил нам Йоханн Боос (г. Хаген, ФРГ). Отметим, что для числовых матриц аналогичный результат доказан в [13] (лемма 4.2).

Предложение 4. Пусть матрица A удовлетворяет условию (4). Отрезки точки $x \in c_A(X)$ ограничены в $c_A(X)$ в точности тогда, когда для каждой последовательности $(g_n) \in \ell(Y')$ ряд $\sum_k \sum_n g_n(A_{nk}(\xi_k))$ сходится. В этом случае

$$\sum_n g_n(\sum_k A_{nk}(\xi_k)) = \sum_k \sum_n g_n(A_{nk}(\xi_k)). \qquad (12)$$

Доказательство. Необходимость. В силу условия (4), $c_A(X)$ содержит отрезки любой последовательности из $\omega(X)$. Допустим, что отрезки точки $x \in c_A(X)$ ограничены, т.е. выполняется условие

$$M := \sup_{n,m} \|\tau_{nm}\| < \infty,$$

где

$$\tau_{nm} := \sum_{k=0}^{m} A_{nk}(\xi_k) \quad (n, m \in \mathbb{N}). \qquad (13)$$

Пусть $(g_n) \in \ell(Y')$, тогда $\sum_n |g_n(\lim_m \tau_{nm})| \leq M \sum_n \|g_n\|$ $(m \in \mathbb{N})$, значит, ряд $\sum_n g_n(\tau_{nm})$ сходится равномерно по m. Поэтому

$$\sum_n g_n(\sum_k A_{nk}(\xi_k)) = \sum_n g_n(\lim_m \tau_{nm}) = \lim_m \sum_n g_n(\tau_{nm})$$
$$= \lim_m \sum_{k=0}^{m} \sum_n g_n(A_{nk}(\xi_k)) = \sum_k \sum_n g_n(A_{nk}(\xi_k)).$$

Таким образом, ряд $\sum_k \sum_n g_n(A_{nk}(\xi_k))$ сходится для всех $(g_n) \in \ell(Y')$ и верно равенство (12).

Достаточность. Допустим, что для $x \in c_A(X)$ ряд $\sum_k \sum_n g_n(A_{nk}(\xi_k))$ сходится при всех $(g_n) \in \ell(Y')$. Рассмотрим в BK-пространстве $\ell(Y')$ линейные функционалы f_m с

9*

$$f_m(G) := \sum_n g_n(\tau_{nm}) \qquad (G := (g_n) \in \ell(Y'),\ m \in \mathbb{N}),$$

где τ_{nm} определены в (I3). Так как

$$|f_m(G)| \leq \sum_n \|g_n\| \|\tau_{nm}\| \leq \sup_n \|\tau_{nm}\| \|G\|,$$

то $f_m \in \ell(Y')'$ и $\|f_m\| \leq \sup_n \|\tau_{nm}\| < \infty$ $(m \in \mathbb{N})$. Положим $G_n := (0,\dots,0,g,0,\dots)$ с $g \in Y'$ на n-ом месте, тогда $\|G_n\|_{\ell(Y')} = \|g\|_{Y'}$ и $f_m(G_n) = g(\tau_{nm})$, а поэтому

$$\|f_m\| = \sup\{|f_m(G)| : \|G\| \leq 1\} \geq \sup\{|g(\tau_{km})| : \|g\| \leq 1\}$$
$$= \|\tau_{nm}\| \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Значит, $\|f_m\| \geq \sup_n \|\tau_{nm}\|$ и в итоге имеем равенство $\|f_m\| = \sup_n \|\tau_{nm}\|$ $(m \in \mathbb{N})$. Так как существует предел

$$\lim_m f(G) = \sum_k \sum_n g_n(A_{nk}(\xi_k)) \qquad (G \in \ell(Y')),$$

то последовательность функционалов f_m поточечно, а тем самым и равномерно ограничено в $\ell(Y')$ т.е. $\sup_{n,m} \|\tau_{nm}\| < \infty$. Это равносильно ограниченности отрезков точки x. Предложение доказано.

Примечание 3. В точках $x \in c_A(X) \cap m(X)$ при консервативной матрицы A имеет место ограниченность по отрезкам. В самом деле,

$$\sup_{n,m} \|\textstyle\sum_{k=0}^{m} A_{nk}(\xi_k)\| \leq \sup_k \|\xi_k\| \|(A_{nk})\| < \infty .$$

Согласно предложению 4, для всех $x \in c_A(X) \cap m(X)$ (в том числе для $e(\xi)$ $(\xi \in X)$) верно равенство (I2). Этот факт используем при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 5. u-консервативная матрица A является конулевой в точности тогда, когда $\chi(A) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Допустим, что $f(e(\xi)) = \sum_k f(e_k(\xi))$ $(\xi \in X,\ f \in c_{uA}(X)')$ и положим $f := \lambda_A$ (см. (9)). Получим

$$a(\xi) = \lambda_A(e(\xi)) = \sum_k \lambda_A(e_k(\xi)) = \sum_k \alpha_k(\xi) \qquad (\xi \in X),$$

т.е. $\chi(A) = 0$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим, что $\chi(A) = 0$. Для произвольного $f \in c_{uA}(X)'$ имеем (ср. (I0))

$$f(e_k(\xi)) = \mu\alpha_k(\xi) + \sum_n g_n(A_{nk}(\xi)) + h_k(\xi) \qquad (k \in \mathbb{N},\ \xi \in X)$$

с $\sum_n \|g_n\| < \infty$. При нахождении суммы $\sum_k f(e_k(\xi))$ учитываем примечание 3. Для всех $\xi \in X$ имеем

$$\sum_k f(e_k(\xi)) = \mu \sum_k \alpha_k(\xi) + \sum_k \sum_n g_n(A_{nk}(\xi)) + \sum_k h_k(\xi)$$

$$= \mu\alpha(\xi) + \sum_n g_n(\sum_k A_{nk}(\xi)) + \sum_k h_k(\xi) = f(e(\xi)).$$

Итак, A — конулевая матрица.

§ 4. Ограниченные последовательности в поле суммируемости $c_{u_A}(X)$

В введении мы сформулировали условие (T) из [2], обеспечивающее выполнение включения $c_A(X) \cap m(X) \subset \overline{c(X)}$ в поле суммируемости $c_A(X)$. Корегулярная u-консервативная матрица A, вообще говоря, не удовлетворяет условию (T). В самом деле,

$$\lim_m \varphi(a(\xi) - \sum_{k=0}^m a_k(\xi)) = \chi(A)(\xi)\,\varphi(u) \quad (\xi \in X),$$

откуда ясно, что этот предел равен нулю для всех $\varphi \in X'$ с $u \in \ker\varphi$. Тем не менее верна

Теорема 6. В поле суммируемости $c_{u_A}(X)$ корегулярной матрицы A ограниченные последовательности являются точками прикосновения подпространства $c(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства утверждения возьмем произвольный функционал $f \in c_{u_A}(X)'$ с $f(x) = 0$ при $x \in c(X)$ и покажем, что $f(x) = 0$ для всех $x \in c_{u_A}(X) \cap m(X)$. Так как f представляется в виде (10) и $f(e(\xi)) = f(e_k(\xi)) = 0$ $(k \in \mathbb{N}, \xi \in X)$, то

$$0 = \sum_k f(e_k(\xi)) = \mu \sum_k a_k(\xi) + \sum_k \sum_n g_n(A_{nk}(\xi)) + \sum_k h_k(\xi),$$

$$0 = f(e(\xi)) = \mu\alpha(\xi) + \sum_n g_n(\sum_k A_{nk}(\xi)) + \sum_k h_k(\xi).$$

Отсюда, учитывая примечание 3, получим

$$0 = \mu\,[\alpha(\xi) - \sum_k \alpha_k(\xi)] = \mu\,\chi(A)(\xi) \qquad (\xi \in X).$$

Ввиду условия $\chi(A) \neq 0$ имеем $\mu = 0$. Для всех $x \in c_{u_A}(X) \cap m(X)$ выполняется равенство (12) (см. примечание 3), поэтому

$$f(x) = \sum_k \sum_n (g_n \circ A_{nk} + h_k)(\xi_k) = \sum_k f(e_k(\xi_k)) = 0.$$

Итак, $c_{u_A}(X) \cap m(X) \subset \overline{c(X)}$.

Теорема 7. Если $m(X) \supset c_{u_A}(X) \supset c(X)$, то $c_{u_A}(X) = c(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала отметим, что в случае $m(X) \supset c_{u_A}(X) \supset c(X)$ матрица A корегулярна. В самом деле, если допустить, что $f(e(\xi)) = \sum_k f(e_k(\xi))$ $(\xi \in X)$ для всех $f \in c_{u_A}(X)'$, то это равенство верно и для всех $f \in m(X)'$. Это противоречит известному факту, что в BK-пространстве $m(X)$ слабая сходимость по отрезкам имеет место только в подпространстве $c_0(X)$.

Согласно теореме 6 $c_{u_A}(X) = c_{u_A}(X) \cap m(X) \subset \overline{c(X)}$, где замыкание берется в $c_{u_A}(X)$. В силу включения $c_{u_A}(X) \subset m(X)$ имеем $c_{u_A}(X) = \overline{c(X)}$ в BK-пространстве $m(X)$, т.е. $c_{u_A}(X) = c(X)$.

В случае $X=Y=\mathbb{K}$ этот результат доказан Мазуром и Орличем ([8], теорема 7).

§ 5. Применения к α-суммируемости числовых последовательностей

Пусть $\alpha := (A^{(\ell)})$ – последовательность бесконечных числовых матриц $A^{(\ell)} := (a^{\ell}_{nk})$ $(\ell \in \mathbb{N})$. Числовая последовательность $x = (\xi_k)$ называется суммируемой методом α (коротко, α-суммируемой) к числу η, если ряды $\sum_k a^{(\ell)}_{nk} \xi_k$ $(n, \ell \in \mathbb{N})$ сходятся и

$$\lim_n \sum_k a^{(\ell)}_{nk} \xi_k = \eta =: \lim_\alpha x \text{ раномерно по } \ell$$

(см., например,[9]). Вопросы α-суммируемости, в особенности α-суммируемость ограниченных последовательностей изучались многими авторами ([5],[10],[11],[6] и др.).

Через c_α обозначим поле α-суммируемости, т.е. множество всех α-суммируемых последовательностей. Метод суммирования α называется консервативным, если $c_\alpha \supset c$.

Теорема 10 (см. Белл [5]). Метод α является консервативным в точности тогда, когда

1^0 существует такое $a_k \in \mathbb{K}$, что $\lim_n a^{(\ell)}_{nk} = a_k$ равномерно по ℓ $(k \in \mathbb{N})$,

2^0 существует такое $a \in \mathbb{K}$, что $\lim_n \sum_k a^{(\ell)}_{nk} = a$ равномерно по ℓ,

3^0 $\sum_k |a^{(\ell)}_{nk}| < \infty$ $(n, \ell \in \mathbb{N})$ и $\sum_k |a^{(\ell)}_{nk}| \le M$ для $\ell \in \mathbb{N}$ и $n \ge N$ при некоторых $M > 0$ и $N \in \mathbb{N}$.

Нетрудно убедится, что если метод α консервативен, то $\sum_k |a_k| < \infty$.

Консервативный метод α будем называть конулевым, если $\chi(\alpha) := a - \sum_k a_k = 0$, и корегулярным, если $\chi(\alpha) \ne 0$.

Мы будем исследовать такие методы α, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

1) матрицы $A^{(\ell)}$ конечнострочны $(\ell \in \mathbb{N})$,

2) $\sup_\ell |a^{(\ell)}_{nk}| < \infty$ $(n, k \in \mathbb{N})$.

Оказывается, что при таких ограничений α-суммируемость можно рассматривать как частный случай изучаемой в предыдущих параграфах суммируемости операторными матрицами. Положим $X := \mathbb{K}$, $Y := m$ и $A_{nk}(\xi) := \xi z_{nk}$, где $\xi \in \mathbb{K}$, $z_{nk} := (a_{nk}^{(l)})_{l=0}^{\infty} \in m$ $(n,k \in \mathbb{N})$. Имеем $A_{nk} \in L(\mathbb{K}, m)$, ибо умножение на число в BK-пространстве m непрерывно и линейно. Согласно условию 1) матричное преобразование

$$\eta_n = \sum_k z_{nk} \xi_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

определено для всех $x \in \omega$. Так как в m сходимость по норме равносильна равномерной сходимости по координатам, то числовая последовательность $x = (\xi_k)$ α-суммируема к числу η в точности тогда, когда

$$\lim_n \sum_k z_{nk} \xi_k = \eta e$$

в m, т.е. $x \in c_{e_A}$. Значит, $c_\alpha = c_{e_A} = c_{e_A}(\mathbb{K})$.

Таким образом, из доказанных высше фактов непосредственно вытекают соответствующие утверждения для α-суммируемости при условиях 1) и 2). Поле суммируемости c_α суть FK-пространство, топология которого определяется полунормами

$$\sup_{n,l} \left| \sum_k a_{nk}^{(l)} \xi_k \right|, \qquad |\xi_n| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Теорема 10 непосредственно получается из теоремы 3. Условия 1° и 2° соответствуют условиям (4) и (5) с выполнением равенств (11). Условие 3° теоремы 10 при ограничениях 1) и 2) будет иметь более простой вид:

$$\sup_{n,l} \sum_k |a_{nk}^{(l)}| < \infty . \tag{13}$$

Действительно, условие (6) в данном случае принимает вид

$$\sup \left\{ \left| \sum_{k=0}^{m} a_{nk}^{(l)} \xi_k \right| : |\xi_k| \le 1,\ m \in \mathbb{N} \right\} \le M \qquad (n,l \in \mathbb{N}).$$

Положив при фиксированных n и l $\xi_k = \operatorname{sgn} a_{nk}^{(l)}$ $(k \in \mathbb{N})$, получим неравенство

$$\sup_m \sum_{k=0}^{m} |a_{nk}^{(l)}| \le M \qquad (n,l \in \mathbb{N}),$$

равносильное условию (13).

Согласно теореме 6 консервативный метод α является конулевым тогда и только тогда, когда в точке e в поле суммируемости c_α имеет место слабая сходимость по отрезкам. Из результатов четвертого параграфа следует, что все ограниченные последовательности в c_α являются точками прикосновения подпространства c, если метод α корегулярен.

Из теоремы 7 заключим следующий результат.

Теорема II. Если консервативный метод α суммирует только ограниченные последовательности, то он суммирует только сходящиеся последовательности.

Литература

I. Юримяэ Э. Некоторые вопросы обобщенных матричных методов суммирования. Корегулярные и конулевые методы// Изв. АН Эст.ССР, сер. техн. и физ. матем. наук. - 1959. - Т. 8, № 2 - С. 115-121.
2. Юримяэ Э. Об одном классе обобщенных матричных методов суммирования// Изв. АН Эст.ССР, сер. техн. и физ.матем. наук. - 1959. - Т. 8, № 3 - С. 166-172.
3. Юримяэ Э. Заметки о корегулярных обобщенных матричных методах суммирования// Уч. зап. Тарт. ун-та. - 1965. - Вып. 177 - С. 62-65.
4. Baric, L.W. The chi function in generalized summability// Stud. math. - 1971. - Vol. 39, N 2. - P. 165-180.
5. Bell, H.T. Order summability and almost convergence // Proc. Amer. Math. Soc. - 1973. - Vol. 38, N 3. - P.548-552.
6. Boos, J. Summation von beschränkten Folgen bezüglich durch Matrizenfolgen definierter Konvergenzbegriffe // Math. Japon. - 1975. - Vol. 20, N 2. - P. 113-136.
7. Maddox, I.J. Infinite matrices of operators. - Lect.Notes Math. - 786 - 1980, 122 pp.
8. Mazur, S., Orlicz, W. On linear methods of summability// Stud. Math. - 1954. - Vol. 14, N 2. - P. 129-160.
9. Petersen, G.M. Almost convergence and the Buck-Pollard property // Proc. Amer. Math. Soc. - 1960. - Vol. 11, N 3, - P. 469-477.
10. Stieglitz, M. Eine Verallgemeinerung des Begriffs der Fastkonvergenz // Math. Japon. - 1973. - Vol. 18, N 1. - P. 53-70.
11. Stieglitz, M. Durch Matrizen erklärte Konvergenzbegriffe und ihre Wirkfelder // Math. Japon. - 1973. - Vol.18 N 1. - P. 235-249.
12. Wilansky, A. An application of Banach linear functionals to summability // Trans. Amer. Math. Soc. - 1949. - Vol. 67. - P. 59-68.

13. Wilansky, A. Distinguished subsets and summability invariants // J. d'Analyse math. - 1964. - Vol. 12. - P.327-350.
14. Zeller, K. Allgemeine Eigenschaffen von Limitierungsverfahren // Math. Z. - 1951. - Bd. 53, N 5. - S. 463-487.
15. Zeller, K. Verallgemeinerte Matrixtransformationen // Math. Z. - 1952. - Bd. 56, N 1. - S. 18-20.

Поступило 29.06.88

ÜBER KONULLÄRE UND KOREGULÄRE OPERATORWERTIGE MATRIZEN

T. Leiger, K. Plakso

Zusammenfassung

Es seien X und Y Banachräume und $A := (A_{nk})$ eine Matrix mit $A_{nk} \in L(X,Y)$. Mit $m(X)$, $c(X)$, $c_0(X)$ bezeichnen wir die Mengen aller beschränkten, konvergenten bzw. zum Nullelement konvergenten Folgen $x = (\xi_k)$, $\xi_k \in X$. Weiter bezeichnen wir

$c_u(Y) := c_0(Y) \oplus \langle e(u) \rangle$ mit $u \in Y$, $u \neq 0$ und $e(u) := (u, u, \ldots)$.

Das Wirkfeld

$$c_{u_A}(X) := \{x = (\xi_k) \; : \; \exists A(x) := (\sum_k A_{nk}(\xi_k))_{n=0}^{\infty} \in c_u(Y)\}$$

ist ein FK-Raum. Eine Matrix A mit $c_{u_A}(X) \supset c(X)$ nennen wir u-konvergenztreu. A ist genau dann u-konvergenztreu, wenn die Bedingungen

$$\lim_n A_{nk}(\xi) = \alpha_k(\xi_k)u, \qquad \lim_n \sum_k A_{nk}(\xi) = \alpha(\xi)u \quad (\xi \in X,\ k \in \mathbb{N}),$$

$$\sup\{\|\sum_{k=0}^{m} A_{nk}(\xi_k)\| \; : \; \|\xi_k\| \leq 1,\ n, m \in \mathbb{N}\} < \infty$$

erfüllt sind. Eine u-konvergenztreue Matrix A heißt konullär wenn für jedes $\xi \in X$ die Abschnitte $e^{[m]}(\xi)$ von $e(\xi)$ in $c_{u_A}(X)$ zu $e(\xi)$ schwach konvergieren. Die nichtkonullären u-konvergenztreuen Matrizen heißen koregulär. Es wird bewiesen, daß eine u-konvergenztreue Matrix A genau dann konullär ist, wenn $\chi(A) = 0$ mit $\chi(A)(\xi) := \alpha(\xi) - \sum_k \alpha_k(\xi)$ $(\xi \in X)$ gilt. Ist A koregulär, so gilt die Inklusion $c_{u_A}(X) \cap m(X) \subset \overline{c(X)}$. Daraus folgt die Implikation

$$m(X) \supset c_{u_A}(X) \supset c(X) \implies c_{u_A}(X) = c(X).$$

Als einen Spezialfall von dem betrachtenden Limitierungsbegriff untersuchen wir die α-Limitierbarkeit. Es sei $\alpha := (A^{(\ell)})$, wobei $A^{(\ell)} := (a_{nk}^{(\ell)})$ $(\ell \in \mathbb{N})$ skalarwertige zeilenfinite Matrizen mit $\sup_\ell |a_{nk}^{(\ell)}| < \infty$ $(n, k \in \mathbb{N})$ sind. Eine Zahlenfolge $x = (\xi_k)$ heißt α-limitierbar, wenn existiert $\lim_n \sum_k a_{nk}^{(\ell)} \xi_k$ gleichmäßig für $\ell \in \mathbb{N}$. Mit c_α bezeichnet man die Menge aller α-limitierbaren Folgen. Setzen wir $X := \mathbb{K}$, $Y := m$, $u := e := (1, 1, \ldots)$ und $A_{nk}(\xi) := \xi z_{nk}$ mit $\xi \in \mathbb{K}$, $z_{nk} := (a_{nk}^{(\ell)})_{\ell=0}^{\infty} \in m$ $(n, k \in \mathbb{N})$, so erhalten wir $c_\alpha = c_{e_A} := c_{e_A}(\mathbb{K})$.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989, 846,74-79

О ТЕОРЕМЕ Г.КАНГРО ДЛЯ ЛАКУНАРНЫХ РЯДОВ

И. Таммерайд

Таллинский политехнический институт

Профессор Г.Кангро ввел понятие суммируемости со скоростью [1] и с единой точки зрения исследовал проблемы, связанные со скоростью суммирования. Среди проблем такого рода особое место принадлежит тауберовым теоремам с остаточным членом. Кангро [3,4] доказал тауберовы теоремы с остаточным членом для метода взвешенных средних Риса. Кангро и предлагал методику ослабления [2] и вариации [4] тауберовых условий. Среди неопубликованных материалов Г.Кангро имеется одна лакунарная тауберова теорема с остаточным членом для метода суммирования арифметических средних, в доказательстве которой Кангро предлагает свою методику доказательства лакунарных тауберовых теорем для λ -суммируемости. При оформлении статьи [6] автор не знал теорему Кангро о лакунах, но по сути эти теоремы разные (сравни лемму 2 настоящей статьи с теоремой Г.Кангро) — одна о λ -ограниченности, другая о λ -сходимости. В настоящей заметке излагается эта теорема Г.Кангро и лакунарная тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса, доказанная при помощи методики Кангро.

Пусть A — матричный метод суммирования последовательностей и λ — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел. Обозначаем

$$c^\lambda = \{x : \exists \lim \beta_k\}, \quad c_A^\lambda = \{x : Ax \in c^\lambda\}$$

и

$$m^\lambda = \{x : \beta_k = O(1)\}, \quad m_A^\lambda = \{x : Ax \in m^\lambda\},$$

где

$$\xi = \lim \xi_k, \quad \beta_k = \lambda_k(\xi_k - \xi), \quad \beta = \lim \beta_k .$$

Пусть $y = Ax$, $y = \{\eta_n\}$ с

$$\eta_n = \sum_k a_{nk}\xi_k \qquad (1)$$

и

$$\eta = \lim \eta_n, \quad \gamma_n = \lambda_n(\eta_n - \eta), \quad \gamma = \lim \gamma_n.$$

Методом взвешенных средних Риса $P = (R, p_n)$ называют треугольный матричный метод, определенный последовательностью чисел $\{p_n\}$ в виде преобразования (I) с матрицей

$$a_{nk} = p_k / P_n, \qquad (2)$$

где $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$, $P_n \neq 0$. В частности, метод $(R, 1)$ является методом средних арифметических C.

Пусть $\{k_\nu\}$ — монотонно возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, удовлетворяющая условию

$$k_{\nu+1} - k_\nu > \theta k_\nu \quad (\theta > 0). \qquad (3)$$

Пусть ряд $\sum u_k$ удовлетворяет условию

$$u_k = 0 \qquad (k \neq k_\nu) \qquad (4)$$

и $x = \{\xi_k\}$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum u_k$.

Теорема Г.Кангро. Пусть

$$\lim_\nu \lambda_{k_{\nu+1}} / \lambda_{k_\nu} = 1 \qquad (5)$$

и ряд $\sum u_k$ удовлетворяет условию (4). Тогда из условия $x \in c_C^\lambda$ следует $x \in c^\lambda$, причем $\eta = \xi$ и $\gamma = \beta$.

Условие (5) является естественным условием λ - сходимости лакунарных рядов. Это следует из одного неопубликованного критерия Г.Кангро.

Лемма I. Если ряд $\sum u_k$ с лакуной (3,4) является λ -сходимым, то справедливо условие (5) или условие

$$\lim_\nu \beta_{k_\nu} \lambda_{k_{\nu+1}-1} / \lambda_{k_\nu} = 0. \qquad (6)$$

Доказательство. При условиях (3) и (4) справедливы соотношения

$$\xi_{k_\nu} = \xi_{k_\nu+1} = \ldots = \xi_{k_{\nu+1}-1},$$

$$\beta_k = \lambda_k(\xi_{k_\nu} - \xi) \qquad (k_\nu \leq k < k_{\nu+1})$$

и

$$\beta_k = \lambda_k \beta_{k_\nu} / \lambda_{k_\nu} \qquad (k_\nu \leq k < k_{\nu+1}). \qquad (7)$$

Из условия (7) следует справедливость соотношений (5) или (6), в зависимости от величины β.

Лемма 2 (см. [6], стр. 52). Если $x \in m_C^\lambda$, справедливы соотношения (3), (4) и метод C сохраняет λ-ограниченность, то $x \in m^\lambda$.

Теорема 2. Пусть

$$m = [(1+\theta)k_\nu], \quad P_n = O(P_n - P_{k_\nu-1}), \quad P_{k_\nu-1} = O(P_n - P_{k_\nu-1}). \qquad (8)$$

Если справедливы соотношения (3), (4) и (5), то из $x \in c_P^\lambda$ следует, что $x \in c^\lambda$ с $\xi = \eta$ и $\beta = \gamma$.

Доказательство. Из соотношений (1), (2), (3) и (4) вытекает, что

$$P_n \eta_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \xi_k = \sum_{k=0}^{k_\nu-1} p_k \xi_k + \sum_{k=k_\nu}^{n} p_k \xi_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{k_\nu-1} p_k \xi_k + \xi_{k_\nu} Q(n, k_\nu),$$

где

$$Q(n, k_\nu) = \sum_{k=k_\nu}^{n} p_k.$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$\xi_{k_\nu}=(P_n\eta_n-\sum_{k=0}^{k_\nu-1}p_k\xi_k)/Q(n,k_\nu)=$$

$$=P_n\eta_n/Q(n,k_\nu)-P_{k_\nu-1}\eta_{k_\nu-1}/Q(n,k_\nu)$$

и

$$\beta_{k_\nu}=\lambda_{k_\nu}(\xi_{k_\nu}-\eta)=$$

$$=\lambda_{k_\nu}(P_n\eta_n-P_{k_\nu-1}\eta_{k_\nu-1}-P_n\eta+P_{k_\nu-1}\eta)/Q(n,k_\nu)=$$

$$=\lambda_{k_\nu}(P_n(\eta_n-\eta)-P_{k_\nu-1}(\eta_{k_\nu-1}-\eta))/Q(n,k_\nu)=$$

$$=(\lambda_{k_\nu}/\lambda_n)\gamma_n P_n/Q(n,k_\nu)-$$

$$-(\lambda_{k_\nu}/\lambda_{k_\nu-1})\gamma_{k_\nu-1}P_{k_\nu-1}/Q(n,k_\nu). \qquad (9)$$

Если $\gamma=0$, то из соотношения (9) при условиях (5) и (8) следует, что

$$\lim_\nu \beta_{k_\nu}=0.$$

Если $\gamma\neq 0$, то из равенства (9) получаем, что

$$\beta_{k_\nu}-\gamma=P_n((\lambda_{k_\nu}/\lambda_n)\gamma_n-\gamma)/Q(n,k_\nu)-$$

$$-P_{k_\nu-1}((\lambda_{k_\nu}/\lambda_{k_\nu-1})\gamma_{k_\nu-1}-\gamma)/Q(n,k_\nu)$$

и

$$\lim_\nu \beta_{k_\nu}=\gamma.$$

Следовательно, имеем

$$\exists \lim_\nu \lambda_{k_\nu}(\xi_{k_\nu}-\xi),$$

и из условия (5), ввиду леммы I, следует, что $x\in c^\lambda$.

Следствие. Из теоремы 2 при $p_n = 1$ следует теорема Кангро.

Примечание I. Условие (5) (сравни с соответствующим условием леммы 2) выполняется при сравнительно медленно растущихся последовательностях λ, например, $\lambda_k = \ln(k+2)$ с $k_\nu = 2^\nu$.

Примечание 2. При помощи теоремы Г.Кангро и метода образующих (см. [5]) можно получить лакунарные тауберовы теоремы с остаточным членом для методов суммирования Чезаро C^n и Гельдера H^n $(n \in N)$.

Примечание 3. Используя методику Кангро вариации тауберовых условий (см. [4] , стр. I64-I65) и теорему 2 можно получить выводы о μ-сходимости P^λ- суммируемого ряда.

Литература

I. К а н г р о Г., О множителях суммируемости типа Бора-Харди для заданной скорости. I. Изв. АН Эст ССР. Физ., Матем., I969, 18, №2, I37-I46.

2. К а н г р о Г., Об ослаблении тауберовых условий. Изв. АН Эст ССР. Физ., Матем., I970, I9, №I, 24-33.

3. К а н г р о Г., Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I97I, 277, I55-I60.

4. К а н г р о Г., Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса. II. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I972, 305, I56-I66.

5. Т а м м е р а й д И., О теоремах тауберова типа с остаточным членом. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, I97I, А №3I2, 27-38.

6. Т а м м е р а й д И., Некоторые тауберовы теоремы с остаточным членом для лакунарных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I978, 448, 52-54.

Поступило I5.I2.86

ON A THEOREM OF G.KANGRO FOR GAP SERIES

I. Tammeraid

Summary

In this paper two Tauberian remainder theorems for gap series are given. The first one is unpublished theorem of G. Kangro for the method $(C, 1)$ and the second one is for the Riesz method (R, p_n).

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989, 846, 80-86

СУММИРУЕМОСТЬ ЧИСЛОВЫХ И АБСТРАКТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЧИСЛОВЫМИ МАТРИЦАМИ

Э. Кольк, С. Баронов

Тартуский государственный университет

Введение

Обозначим через $s(X)$ множество всех последовательностей[1] $x:=(x_k)$ с $x_k \in X$, где X – банахово пространство над полем $\mathbb{K}$ вещественных чисел $\mathbb{R}$ или компексных чисел $\mathbb{C}$. Вместо $s(\mathbb{K})$ пишем коротко s. Введем еще обозначения[1]

$$c_0:=\{a=(a_k)\in s : \lim_k a_k=0,\ \|a\|=\sup_k|a_k|\};$$

$$\ell^p:=\{a=(a_k)\in s : \sum_k|a_k|^p<+\infty,\ \|a\|=(\sum_k|a_k|^p)^{1/p}\},\ p\geq 1;$$

$$e^k:=(\delta_{ki}),\ \text{где}\ \delta_{ki}=0\ \text{при}\ i\neq k\ \text{и}\ \delta_{kk}=1;$$

$$a(z):=(a_k z),\ \text{где}\ a=(a_k)\in s\ \text{и}\ z\in X;$$

$$\varphi(X):=\{\sum_{k=1}^{m} e^k(z_k) : z_k\in X, m\in\mathbb{N}\},\ \varphi:=\varphi(\mathbb{K});$$

$$x^{[n]}:=\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k);$$

$$A:=(a_{nk}),\ \text{где}\ a_{nk}\in\mathbb{K};$$

$$A_n(x):=\sum_k a_{nk}x_k;\quad Ax:=(A_n x);$$

$$(E,F):=\{A=(a_{nk}) : Ax\in F\subset s(X)\quad \forall x\in E\subset s(X)\};$$

$$|x|:=(\|x_k\|);\quad |A|:=(|a_{nk}|);$$

$$\lambda[X]:=\{x=(x_k)\in s(X) : |x|\in\lambda\},\ \text{где}\ \lambda\subset s.$$

Пространствами последовательностей будем называть та-

---

[1] Свободные индексы и индексы суммирования принимают все значения из множества $\mathbb{N}:=\{1,2,\ldots\}$.

кие линейные подпространства E векторно пространства $s(X)$, что $\varphi(X)\subset E$. Пространство последовательностей $\lambda\subset s$ называется нормальным (или солидным), если из $(a_k)\in\lambda$ и $|b_k|\leq|a_k|$ следует $(b_k)\in\lambda$.

Банахово пространство последовательностей $E\subset s(X)$ называется BK-пространством, если все операторы $f_k: E\to X$, где $f_k(x):=x_k$, непрерывным, и AK-пространством, если $\lim\limits_n x^{[n]}=x$ для всех $x\in E$. Норму $\|\cdot\|_\lambda$ банахова пространства последовательностей $\lambda\subset s$ будем называть монотонной, если для всех $a=(a_k)\in\lambda$ и $b=(b_k)\in\lambda$ с $|a_k|\leq$ $\leq|b_k|$ имеем $\|a\|_\lambda\leq\|b\|_\lambda$. Отметим, что если нормальное пространство последовательностей $\lambda\subset s$ обладает монотонной нормой, то

$$a=(a_k)\in\lambda \Longrightarrow |a|=(|a_k|)\in\lambda,\ \|a\|_\lambda=\||a|\|_\lambda.$$

Непосредственно доказывается (ср.[4], стр. 98, предложение I)

Предложение I. Если $\lambda\subset s$ – нормальное BK-пространство с монотонной нормой, то $\lambda[X]$ является BK-пространством относительно нормы

$$\|x\|_{\lambda[X]}:=\||x|\|_\lambda.$$

В 1956 году Г.Кангро [2] показал, что $A\in(\ell^1[X],\ell^1[X])$ тогда и только тогда, когда $A\in(\ell^1,\ell^1)$. Т.Ахун и автор [4] доказали, что утверждение

$$A\in(\lambda[X],\mu[X])\Longleftrightarrow A\in(\lambda,\mu) \tag{I}$$

выполнено, если λ – нормальное BK-AK-пространство с монотонной нормой и $\mu=c_0$. Данная заметка посвящена изучению утверждения (I) в случае произвольного нормального BK-пространства μ с монотонной нормой. Доказывается, что из $A\in(\lambda[X],\mu[X]')$ следует $A\in(\lambda,\mu)$, а из $|A|\in(\lambda,\mu)$ следует $A\in(\lambda[X],\mu[X])$. Отсюда вытекает справедливость утверждения (I) для любого AK-пространства μ, ибо в таком случае из $A\in(\lambda,\mu)$ следует $|A|\in(\lambda,\mu)$.

I. Некоторые свойства пространств последовательностей

Сначала докажем

Предложение 2. Пусть $\lambda\subset s$ – нормальное BK-пространство с монотонной нормой. BK-пространство $\lambda[X]$ является AK-пространством тогда и только тогда, когда λ

является AK-пространством.

Доказательство. Необходимость. Для элемента $z\in X$ с $\|z\|=1$ рассмотрим подпространство $\lambda_z[X]:=\{a(z): a\in\lambda\}$ пространства $\lambda[X]$. Оператор $\Phi:\lambda_z[X]\to\lambda$, $\Phi(a(z)):=a$ является линейной биекцией, причем

$$\|\Phi(a(z))\|_\lambda=\|a\|_\lambda=\|\,|a|\,\|_\lambda=\|\,|a(z)|\,\|_\lambda=\|a(z)\|_{\lambda[X]}.$$

Итак, пространство λ линейно изометрично подпространству $\lambda_z[X]$. Так как $\Phi(a(z)^{[n]})=a^{[n]}$ для всех $n\in\mathbb{N}$, то в силу непрерывности Φ из свойства AK пространства $\lambda[X]$ вытекает свойство AK пространства λ.

Достаточность. Пусть λ – AK-пространство и $x=(x_k)\in\lambda[X]$, т.е. $|x|=(\|x_k\|)\in\lambda$. Тогда $\lim x^{[n]}=x$ и, значит,

$$\lim_n \|\,|x|^{[n]}-|x|\,\|_\lambda=0. \tag{2}$$

Так как

$$\|x^{[n]}-x\|_{\lambda[X]}=\|\,|x^{[n]}-x|\,\|_\lambda=\|\,|x|^{[n]}-|x|\,\|_\lambda,$$

то из (2) выводим равенство $\lim_n x^{[n]}=x$ в пространстве $\lambda[X]$. Предложение доказано.

Для матричного метода суммирования A имеет место

Предложение 3. Пусть $\lambda\subset s$ – нормальное банахово пространство. Если $\mu\subset s$ является AK-пространством, то из $A\in(\lambda,\mu)$ следует $|A|\in(\lambda,\mu)$.

Доказательство. Пусть $A\in(\lambda,\mu)$ и $x=(x_k)\in\lambda$. Для фиксированного индекса m рассмотрим последовательность $x^m:=((\operatorname{sgn} a_{mk})x_k)$. В силу нормальности λ имеем $x^m\in\lambda$ и, значит, $Ax^m\in\mu$. Таким образом, ряд $A_m x^m=\sum_k a_{mk}(\operatorname{sgn} a_{mk})x_k=\sum_k |a_{mk}|x_k=|A|_m x$ сходится для любого индекса m и ввиду включения $\varphi\subset\mu$ все отрезки $y^{[n]}$ последовательности $y:=|A|x$ принадлежат в AK-пространство μ. Следовательно принадлежит в пространство μ и последовательность $|A|x=y=\lim_k y^{[n]}$. Предложение доказано.

2. Преобразования числовых и абстрактных последовательностей

Здесь мы исследуем справедливость утверждения (I) в случае, когда λ и μ – нормальные BK-пространства с монотонными нормами и $A=(a_{nk})$ – числовая матрица. Для этого напомним одну теорему Целлера (см. [5], или [I], стр. 28; ср. также [3], стр. 32, теорема I).

Предложение 4. Если λ является AK-пространством, то $A\in(\lambda,\mu)$ тогда и только тогда, когда

I^{0} $Ae^{i}\in\mu$ $(i\in\mathbb{N})$,

2^{0} $\|Ax^{[n]}\|_{\mu}\leq M\|x^{[n]}\|_{\lambda}$ $(x\in\lambda,\ n\in\mathbb{N})$.

Далее, $A\in(\lambda[X],\mu[X])$ тогда и только тогда, когда

I^{00} $Ae^{i}(z)\in\mu[X]$ $(i\in\mathbb{N},\ z\in X)$,

2^{00} $\|Ax^{[n]}\|_{\mu[X]}\leq M\|x^{[n]}\|_{\lambda[X]}$ $(x\in\lambda[X],\ n\in\mathbb{N})$.

Условие I^{00} означает, что $(a_{ni}z)_{n=1}^{\infty}\in\mu[X]$, т.е. $(|a_{ni}|\|z\|)_{n=1}^{\infty}\in\mu$. Но последнее соотношение выполнено в точности тогда, когда $(|a_{ni}|)_{n=1}^{\infty}\in\mu$, которое в силу нормальности μ равносильно условию $(a_{ni})_{k=1}^{\infty}\in\mu$. Так как $(a_{ni})_{n=1}^{\infty}=Ae^{i}$, то в итоге доказана эквивалентность условий I^{0} и I^{00}.

Убедимся теперь, что из условия 2^{00} следует 2^{0}. Действительно, если $a=(a_k)\in\lambda$ и $z\in X$ с $\|z\|=1$, то $x:=a(z)=(a_kz)\in\lambda[X]$. Поэтому, учитывая равенства

$$\|x^{[n]}\|_{\lambda[X]}=\|(\|a_1z\|,\|a_2z\|,\dots,\|a_nz\|,0,0,\dots)\|_{\lambda}=\|a^{[n]}\|_{\lambda}$$

и

$$\|Ax^{[n]}\|_{\mu[X]}=\|(\|\sum_{k=1}^{n}a_{mk}a_kz\|)\|_{\mu}=\|(|\sum_{k=1}^{n}a_{mk}a_k|)\|_{\mu}=\||Aa^{[n]}|\|_{\mu}=\|Aa^{[n]}\|_{\mu},$$

увидим, что неравенство 2^{00} для нашей последовательности $x=a(z)$ превращается в неравенство 2^{0} для последовательности a. Итак, в силу предложения 4 имеет место

Предложение 5. Если λ является AK-пространством, то из $A\in(\lambda[X],\mu[X])$ следует $A\in(\lambda,\mu)$.

Докажем теперь, что если условие 2^{0} выполнено для матрицы $|A|$, то условие 2^{00} выполнено для матрицы A. Действительно, если $x=(x_k)\in\lambda[X]$, то $|x|=(\|x_k\|)\in\lambda$ и по условию 2^{0} имеет место неравенство

$$\||A||x|^{[n]}\|_{\mu}\leq M\||x|^{[n]}\|_{\lambda}. \tag{3}$$

Далее, так как при всех $m\in\mathbb{N}$

$$\|A_mx^{[n]}\|=\|\sum_{k=1}^{n}a_{mk}x_k\|\leq\sum_{k=1}^{n}|a_{mk}|\|x_k\|=|A|_m|x|^{[n]},$$

то на основе монотонности нормы $\|\cdot\|_\mu$ имеем

$$\|Ax^{[n]}\|_{\mu[X]} = \|(\|A_m x^{[n]}\|)_{m=1}^{\infty}\|_\mu \leqslant \||A||x|^{[n]}\|_\mu .$$

Следовательно, условие 2^{00} выполнено в силу неравенства (3) и равенства $\||x|^{[n]}\|_\lambda = \|x^{[n]}\|_\lambda$.

Так как условие $|A|e^i \in \mu$ равносильно условию I^0 ввиду нормальности пространства μ, то на основе предложения 4 доказано

Предложение 6. Пусть λ – AK-пространство. Если $|A| \in (\lambda, \mu)$, то $A \in (\lambda[X], \mu[X])$.

Для матрицы A с неотрицательными элементами условия $A \in (\lambda, \mu)$ и $|A| \in (\lambda, \mu)$ равносильны. Поэтому из предложений 5 и 6 непосредственно вытекает

Следствие I. Пусть λ – AK-пространство. Если $A = (a_{nk})$ – неотрицательная матрица, то $A \in (\lambda[X], \mu[X])$ тогда и только тогда, когда $A \in (\lambda, \mu)$.

На основе предложения 3 из $A \in (\lambda, \mu)$ следует $|A| \in (\lambda, \mu)$, если пространство μ является AK-пространством. Поэтому справедливо также

Следствие 2. Если оба пространства λ и μ являются AK-пространствами, то $A \in (\lambda[X], \mu[X])$ тогда и только тогда, когда $A \in (\lambda, \mu)$.

Следствие 2 при $\mu = c_0$ доказали Э.Кольк и Т.Ахун (см. [4], стр. I03, следствие 2), а случай $\lambda = \mu = \ell^1$ изучал Г. Кангро [2].

Литература

I. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов. – 2-е изд., исправленное и дополненное. – Таллин: "Валгус", I977. – 280 с.
2. Кангро Г. О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. – Изв. АН Эст. ССР. Сер. техн. и физ. матем. наук, I956, 5, № 2, I08–I28.
3. Кольк Э. К обобщению одной теоремы Целлера. – Тезисы докладов конф. "Методы алгебры и анализа", Тарту, I983, 3I–33.
4. Кольк Э., Ахун Т. Суммируемость скалярными матрицами в абстрактных пространствах. – Уч. зап. Тарт. ун-та, I987, 770, 97–I04.

5. Zeller, K. Matrixtransformationen von Folgenräumen. - Rend. mat. e applic., 1953, 12, N° 3-4, 340-346.

Поступило 06.09.88

SUMMABILITY OF SCALAR AND ABSTRACT SEQUENCES BY SCALAR MATRICES

E. Kolk, S. Baronov

Summary

For a Banach spaces X over the field $\mathbb{K}$ of real or complex numbers let $s(X)$ be the set of all X-valued sequences $x := (x_k)$. Define

$$s := s(\mathbb{K}); \quad \mathbb{N} := \{1,2,\dots\};$$

$$c_0 := \{a = (a_k) \in s : \lim_k a_k = 0, \|a\| = \sup_k |a_k|\};$$

$$\ell^1 := \{a = (a_k) : \|a\| = \sum_k |a_k| < +\infty\};$$

$$e^k(z) := (\delta_{ki} z) \text{ where } k \in \mathbb{N}, z \in X, \delta_{ki} = 0 \text{ for } i \neq k, \delta_{kk} = 1;$$

$$\varphi(X) := \{\sum_{k=1}^{m} e^k(z_k) : z_k \in X, m \in \mathbb{N}\};$$

$$x^{[n]} := \sum_{k=1}^{n} e^k(x_k);$$

$$A := (a_{nk}) \text{ where } a_{nk} \in \mathbb{K}; \quad |A| := (|a_{nk}|), \ |x| := (\|x_k\|);$$

$$A_n x := \sum_k a_{nk} x_k; \quad Ax := (A_n x);$$

$$(E,F) := \{A = (a_{nk}) : Ax \in F \subset s(X), \forall x \in E \subset s(X)\};$$

$$\lambda[X] := \{x \in s(X) : |x| \in \lambda\} \text{ where } \lambda \subset s.$$

Any linear subspace E of the vector space $s(X)$ with $\varphi(X) \subset E$ is called a sequence space. A sequence space $\lambda \subset s$ is called normal (or solid) if $(b_k) \in \lambda$ whenever $|b_k| \leq |a_k|$ ($k \in \mathbb{N}$) for some $(a_k) \in \lambda$. A Banach sequence space $E \subset s(X)$ is called a BK-space if the maps $f_k : E \to X$, $f_k(x) = x_k$ are continuous and an AK-space if $\lim_n x^{[n]} = x$ in E for all $x \in E$. The norm $\|\cdot\|_\lambda$ of a Banach sequence space $\lambda \subset s$

is called monotone if for all $(b_k), (d_k) \in \lambda$ with $|b_k| \leq$ $\leq |d_k|$ $(k \in \mathbb{N})$ the inequality $\|(b_k)\|_\lambda \leq \|(d_k)\|_\lambda$ holds. If λ is a normal BK-space with the monotone norm then $\lambda[X]$ is the BK-space with respect to the norm

$$\|x\|_{\lambda[X]} := \| |x| \|_\lambda .$$

G.Kangro [2] has shown that $A \in (\ell^1[X], \ell^1[X])$ if and only if $A \in (\ell^1, \ell^1)$. Later it was proved by T.Ahun and author [4] that the statements $A \in (\lambda[X], c_0[X])$ and $A \in$ $\in (\lambda, c_0)$ are equivalent if λ is a normal BK-AK-space with the monotone norm. In this note it is proved that

$$A \in (\lambda[X], \mu[X]) \Rightarrow A \in (\lambda, \mu)$$

and

$$|A| \in (\lambda, \mu) \Rightarrow A \in (\lambda[X], \mu[X])$$

if λ an μ are normal BK-spaces with the monotone norms and λ is an AK-space. Hence it follows that the statements $A \in (\lambda[X], \mu[X])$ and $A \in (\lambda, \mu)$ are equivalent if λ and μ are both normal BK-AK-spaces with the monotone norms.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989. 846, 87-98

НОВОЕ СЕМЕЙСТВО ОБОБЩЕННЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ НЁРЛУНДА

А. Тали

Таллинский педагогический институт

В настоящей статье вводится новое семейство обобщенных методов Нёрлунда[1], исследуются его структура и свойства. При этом применяются результаты работ [1-5] о выпуклых семействах, о суммировании со скоростью и о сильном суммировании со скоростью.

1. О строении методов $(N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$

1.1. Пусть $\mathcal{E}$ – отделимое локально выпуклое пространство (ЛВП) над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), топология которого определена семейством полунорм $\mathcal{P}=\{p\}$, и $x=(\xi_n)$ – последовательности, где $\xi_n\in\mathcal{E}$ при любом $n=0,1,\dots$. Рассмотрим семейство методов суммирования[2] A_α, заданных в виде преобразований последовательностей[3] $x\in X_\alpha$ в последовательности $A_\alpha x=(\eta_n^\alpha)$, где $\eta_n^\alpha\in\mathcal{E}$, α – непрерывный вещественный параметр со значениями $\alpha>\alpha_0$ и α_0 – фиксированное число.

Говорят, что последовательность x суммируема методом A_α (коротко A_α-суммируема) к сумме $\eta\in\mathcal{E}$, если

$$\lim_n \eta_n^\alpha=\eta\ . \tag{1.1}$$

Пусть, далее, $\lambda=(\lambda_n)$ – некоторая числовая последовательность, где $\lambda_n>0$ и $\lambda_n\nearrow$.

Говорят, что последовательность x суммируема методом A_α со скоростью λ (коротко A_α^λ-суммируема) к сумме η, если выполнено условие (1.1) и существует предел $\lim_n\lambda_n(\eta_n^\alpha-\eta)$. В частности, если $\lim_n\lambda_n(\eta_n^\alpha-\eta)=\theta$, где θ – нулевой элемент пространства $\mathcal{E}$, то последовательность x называется

---

[1] Об этом семействе автором было сделано сообщение на конференции Тартуского университета в 1988 году (см. [5]).

[2] Условимся в дальнейшем обозначать символом A_α как методы суммирования, так и семейство этих методов.

[3] Символ X_α обозначает поле применения метода A_α.

регулярно A_α^λ -суммируемой к η.

Говорят, что x является A_α^λ-ограниченной, если выполнены условия (I.I) и $\lambda_n(\eta_n^\alpha - \eta) = O_\alpha(1)$.

Для дальнейшего введем следующие обозначения:

cA_α – поле суммируемости метода A_α,

c_0A_α – поле суммируемости к нулю $\theta \in \mathcal{E}$ метода A_α,

mA_α – поле ограниченности метода A_α,

$c^\lambda A_\alpha$ – множество всех A_α^λ -суммируемых последовательностей,

$c_*^\lambda A_\alpha$ – множество всех регулярно A_α^λ -суммируемых последовательностей,

$m^\lambda A_\alpha$ – множество всех A_α^λ -ограниченных последовательностей.

Предположим, далее, что методы A_α и $A_{\alpha+\delta}$ при любых $x \in X_\alpha$, α и $\delta > 0$ связаны соотношением (см., например, [I, 2, 5])

$$\eta_n^{\alpha+\delta} = \frac{1}{b_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=0}^{n} d_{n,k}^{\alpha,\delta} b_k^\alpha \eta_k^\alpha, \tag{I.2}$$

где $(d_{n,k}^{\alpha,\delta})$ – нижняя треугольная числовая матрица с $d_{n,k}^{\alpha,1} = 1/M_\alpha$, причем число M_α не зависит от k и n, а (b_n^α) – некоторая числовая последовательность с $b_n^\alpha \neq 0$.

В работах [I-5] исследуются свойства семейства методов A_α, связанных соотношением (I.2). Результаты упомянутых работ будут ниже применены к одному новому семейству обобщенных методов Нёрлунда.

I.2. Введем семейство обобщенных методов Нёрлунда $(N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$ для суммирования последовательностей x. Для этого рассмотрим сначала числовую последовательность $(A_n^{\alpha,\beta})$, которая формально определена степенным рядом (см. [8])

$$(1-z)^{-(\alpha+1)}\left(\log\frac{e}{1-z}\right)^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha,\beta} z^n, \tag{I.3}$$

где $\alpha, \beta, z \in \mathbb{R}$ и e – основание натурального логарифма. Введем методы[4] $A_\alpha = (N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$ при помощи соотношения

$$\eta_n^\alpha = \frac{1}{R_n^{\alpha,\beta_0}} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}^{\alpha,\beta_0} q_k \xi_k, \tag{I.4}$$

где $R_n^{\alpha,\beta_0} = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}^{\alpha,\beta_0} q_k$, $p_n^{\alpha,\beta_0} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1,\beta_0} p_k$ и p_n, q_n – некоторые числа, при которых $R_n^{\alpha,\beta_0} \neq 0$.

---

[4] Здесь и в дальнейшем β_0, γ_0, δ_0 – произвольно фиксированные вещественные числа.

Заметим, что, в частности, когда $\beta_0 = 0$, методы $(N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$ превращаются в обобщенные методы Нёрлунда (N, p_n^{α}, q_n) (см., например, [4, 9]). Если, к тому же, $q_n = 1$ при любом $n = 0, 1, \ldots$, то мы получаем методы Нёрлунда (N, p_n^{α}) (см., например, [4, 7]). В частности, когда $q_n = A_n^{\gamma_0,\sigma_0}$ и $p_n = A_n^{-1,0} = A_n^{-1}$, то методы $(N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$ являются методами $(C, \alpha, \beta_0, \gamma_0, \sigma_0)$, введенными в работе [8]. Если $\beta_0 = \sigma_0 = 0$, то методы $(C, \alpha, \beta_0, \gamma_0, \sigma_0)$ превращаются в обобщенные методы Чезаро (C, α, γ_0), если же и $\gamma_0 = 0$, то мы получаем методы Чезаро (C, α).

Убедимся, далее, что методы $A_\alpha = (N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$ и $A_{\alpha+\delta} = (N, p_n^{\alpha+\delta,\beta_0}, q_n)$ при любых α и $\delta > 0$ связаны соотношением

$$\eta_n^{\alpha+\delta} = \frac{1}{R_n^{\alpha+\delta,\beta_0}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1} R_k^{\alpha,\beta_0} \eta_k^{\alpha}, \qquad (I.5)$$

где $A_{n-k}^{\delta-1} = A_{n-k}^{\delta-1,0}$ – числа Чезаро (см. соотношение (I.3)).

Для этого покажем сначала, что имеет место соотношение

$$p_n^{\alpha+\delta,\beta_0} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1} p_k^{\alpha,\beta_0}. \qquad (I.6)$$

Действительно, при помощи равенства (см. [8])

$$\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1,\beta_0} A_k^{\gamma_0,\sigma_0} = A_n^{\alpha+\gamma_0,\beta_0+\sigma_0}, \qquad (I.7)$$

мы получаем, что

$$p_n^{\alpha+\delta,\beta_0} = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha+\delta-1,\beta_0} p_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-\nu} A_{n-\nu-k}^{\delta-1,0} A_k^{\alpha-1,\beta_0} p_\nu =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{k} A_{n-k}^{\delta-1,0} A_{k-\nu}^{\alpha-1,\beta_0} p_\nu = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1,0} p_k^{\alpha,\beta_0}.$$

Учитывая соотношения (I.4) и (I.6), мы выводим соотношение (I.5):

$$\eta_n^{\alpha+\delta} = \frac{1}{R_n^{\alpha+\delta,\beta_0}} \sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu} q_\nu \xi_\nu = \frac{1}{R_n^{\alpha+\delta,\beta_0}} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-\nu} A_{n-\nu-k}^{\delta-1} p_k^{\alpha,\beta_0} q_\nu \xi_\nu =$$
$$= \frac{1}{R_n^{\alpha+\delta,\beta_0}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1} \sum_{\nu=0}^{k} p_{k-\nu}^{\alpha,\beta_0} q_\nu \xi_\nu = \frac{1}{R_n^{\alpha+\delta,\beta_0}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1} R_k^{\alpha,\beta_0} \eta_k^{\alpha}.$$

Мы имеем также соотношение

$$R_n^{\alpha+\delta,\beta_0} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1} R_k^{\alpha,\beta_0}, \qquad (I.8)$$

так как, в силу соотношения (I.6),

$$R_n^{\alpha+\delta,\beta_0} = \sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu}^{\alpha+\delta,\beta_0} q_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-\nu} A_{n-\nu-k}^{\delta-1} p_k^{\alpha,\beta_0} q_\nu =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1} \sum_{\nu=0}^{k} p_{k-\nu}^{\alpha,\beta_0} q_\nu = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1} R_k^{\alpha,\beta_0}.$$

Важно заметить, что соотношение (I.5) между методами $A_\alpha=(N,p_n^{\alpha,\beta_0},q_n)$ и $A_{\alpha+\delta}=(N,p_n^{\alpha+\delta,\beta_0},q_n)$ является соотношением (I.2) с $b_n^\alpha=R_n^{\alpha,\beta_0}$, $d_{n,k}^{\alpha,\delta}=A_{n-k}^{\delta-1}$ и $M_\alpha=1$. Поэтому мы можем к методам $(N,p_n^{\alpha,\beta_0},q_n)$ применять результаты работ [I, 2, 3, 5].

2. Выпуклость семейства методов $(N,p_n^{\alpha,\beta_0},q_n)$

2.I. Приведем некоторые общие понятия и теоремы.

Рассмотрим семейство методов A_α с $\alpha>\alpha_0$. Сформулируем определения нуль-выпуклого и выпуклого семейства (см., например, [5, 3, I]).

Определение 2.А. Семейство методов A_α называется выпуклым, если при любых $\alpha<\beta$ выполняются условия

$$mA_\alpha\subset mA_\beta,\ cA_\alpha\subset cA_\beta \tag{2.I}$$

и справедлива импликация

$$x\in mA_\alpha,\ x\in cA_\beta,\ \alpha<\gamma<\beta\Longrightarrow x\in cA_\gamma. \tag{2.2}$$

Если условия (2.I) и (2.2) имеют место с заменой в них символа c на c_0, то семейство A_α называется нуль-выпуклым.

Приведем следующую теорему о нуль-выпуклости семейства A_α (см. [5], теорема I, а для числовых последовательностей также [I], теорема 4).

Теорема 2.А. Если методы семейства A_α связаны соотношением (I.2), которое удовлетворяет при любых $\alpha>\alpha_0$ и $\delta\in\,]0;1[$ условиям[5]:

1° $|b_n^\alpha/b_{n+k}^\alpha|\le N_\alpha$ при каждых n и k,

2° $K_{\alpha,\delta}n^\delta\le|b_n^{\alpha+\delta}/b_n^\alpha|\le L_{\alpha,\delta}n^\delta$ $(n>0)$,

3° $d_{n,k}^{\alpha,\delta}=O_{\alpha,\delta}\{(n-k+1)^{\delta-1}\}$ $(0\le k\le n)$,

4° $d_{n,k}^{\alpha,\delta}-d_{n,k+1}^{\alpha,\delta}=O_{\alpha,\delta}\{(n-k+1)^{\delta-2}\}$ $(0\le k<n)$,

то семейство A_α является нуль-выпуклым.

Сформулируем теорему о выпуклости семейства A_α (см., например, [5], теорема А, а также [3], теорема 2).

Теорема 2.Б. Пусть

---

[5] N_α, $K_{\alpha,\delta}$ и $L_{\alpha,\delta}$ – положительные числа, зависящие от α и α,δ соответственно.

1^0 линейные преобразования A_α переводят каждую последовательность $x' = (\xi'_n)$ с постоянными членами $\xi'_n = \xi$ в последовательности $A_\alpha x' = (\eta'^{\alpha}_n)$, причем $\lim\limits_n \eta'^{\alpha}_n = a_\alpha \xi$, где $a_\alpha \neq 0$ – некоторые числа.

Если семейство A_α нуль-выпукло, то оно и выпукло[6].

В основе применения выпуклых семейств A_α к суммированию со скоростью лежит (см. [3], теорема 3)

Теорема 2.В. Пусть:

1^0 $\lambda_\alpha = (\lambda^\alpha_n)$ – некоторые числовые последовательности с $0 < \lambda^\alpha_n \uparrow \infty$,

2^0 A_α – линейные преобразования, переводящие каждую последовательность $x' = (\xi'_n)$ с $\xi'_n = \xi$ в последовательности (η'^{α}_n) с $\eta'^{\alpha}_n = a_\alpha \xi$, где $a_\alpha \neq 0$ – некоторые числа.

а) Если семейство методов A'_α, где $A'_\alpha x = (\lambda^\alpha_n \eta^\alpha_n)$ и $(\eta^\alpha_n) = A_\alpha x$, является нуль-выпуклым, то при любых $\alpha < \beta$ справедливы импликации

$$x \in m^{\lambda_\alpha} A_\alpha \Longrightarrow x \in m^{\lambda_\beta} A_\beta, \tag{2.3}$$

$$x \in c_*^{\lambda_\alpha} A_\alpha \Longrightarrow x \in c_*^{\lambda_\beta} A_\beta \tag{2.4}$$

и

$$x \in m^{\lambda_\alpha} A_\alpha,\ x \in c_*^{\lambda_\beta} A_\beta,\ \alpha < \gamma < \beta \Longrightarrow x \in c_*^{\lambda_\gamma} A_\gamma. \tag{2.5}$$

б) Если семейство A'_α является выпуклым, то импликации (2.3)-(2.5) справедливы с заменой в них символа c_* на c.

2.2. Обратимся теперь к методам $A_\alpha = (N, p^{\alpha,\beta_0}_n, q_n)$. Справедлива следующая теорема о выпуклости[7].

Теорема 2.I. Если при любых $\alpha > \alpha_0$ и $\delta \in]0;1[$ выполнены условия:

1^0 $|R^{\alpha,\beta_0}_n / R^{\alpha,\beta_0}_{n+k}| \leq N_\alpha$ для каждых n и k,

2^0 $|R^{\alpha+\delta,\beta_0}_n / R^{\alpha,\beta_0}_n| \geq K_{\alpha,\delta}\, n^\delta$ для каждого n,

то семейство $A_\alpha = (N, p^{\alpha,\beta_0}_n, q_n)$ выпукло (причем методы A_α совместны) с $\alpha > \alpha_0$.

---

[6] В частности, когда $a_\alpha = 1$ при любом α, то методы A_α к тому же совместны.

[7] Теоремы 2.I и 4.I, а также следствия 2.I и 4.I были доложены (без доказательств) на конференции Тартуского университета (см. [5]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема следует непосредственно из теорем 2.А и 2.Б. Действительно, методы A_α связаны соотношением (I.2) с $a^{\alpha,\delta}_{n,k} = A^{\delta-1}_{n-k}$ (см. соотношение (I.5)), удовлетворяющим условиям 3° и 4° теоремы 2.А, и с $b^{\alpha}_{n} = R^{\alpha,\beta_0}_{n}$, удовлетворяющим условиям I° и 2° теоремы 2.А, так как, в силу условия I° и соотношения (I.8),

$$|R^{\alpha+\delta,\beta_0}_{n}| \leq \sum_{k=0}^{n} A^{\delta-1}_{n-k} |R^{\alpha,\beta_0}_{k}| \leq N_\alpha n^\delta |R^{\alpha,\beta_0}_{n}| .$$

Поэтому из теоремы 2.А следует нуль-выпуклость семейства A_α. Методы A_α удовлетворяют по определению условию I° теоремы 2.Б (с $a_\alpha = 1$), поэтому из теоремы 2.Б следует выпуклость семейства A_α (причем методы совместны).

Заметим, что доказанная теорема является обобщением теорем о выпуклости семейств методов (N, p^α_n, q_n) и (N, p^α_n), доказанных в работах [I, 7, 9] для $\mathcal{E} = \mathbb{R}$.

Следствие 2.I. Семейство $A_\alpha = (C, \alpha, \beta_0, \gamma_0, \sigma_0)$ выпукло при $\alpha > -\gamma_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся, что выполнены условия I° и 2° теоремы 2.I с $R^{\alpha,\beta_0}_{n} = A^{\alpha+\gamma_0,\ \beta_0+\sigma_0}_{n}$. При помощи соотношения (I.7) мы выводим:

$$|R^{\alpha,\beta_0}_{n}| = |\sum_{\nu=0}^{n} A^{\alpha+\gamma_0-1,\ \beta_0+\sigma_0}_{n-\nu}| \leq \sum_{\nu=0}^{n} |A^{\alpha+\gamma_0-1,\beta_0+\sigma_0}_{n-\nu}| \leq$$
$$\leq \sum_{\nu=0}^{n+k} |A^{\alpha+\gamma_0-1,\ \beta_0+\sigma_0}_{n-\nu}| .$$

Учитывая, далее, лемму 3 из работы [8] , мы получаем для любых n , k и $\alpha > -\gamma_0$ оценку

$$|R^{\alpha,\beta_0}_{n}| \leq N_\alpha |A^{\alpha+\gamma_0,\beta_0+\sigma_0}_{n+k}| = N_\alpha |R^{\alpha,\beta_0}_{n+k}| .$$

Таким образом, условие I° теоремы 2.I выполнено. Выполнено и условие 2° этой теоремы, так как, в силу соотношения (см. [8])

$$A^{\alpha,\beta_0}_{n} \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\log n)^{\beta_0} \quad (\alpha \neq -1, -2, \ldots) ,$$

мы получаем, что

$$|R^{\alpha+\delta,\beta_0}_{n} / R^{\alpha,\beta_0}_{n}| = |A^{\alpha+\delta+\gamma_0,\beta_0+\sigma_0}_{n} / A^{\alpha+\gamma_0,\beta_0+\sigma_0}_{n}| \geq K_{\alpha,\delta} n^\delta .$$

Следствие доказано.

Примечание 2.I. Заметим, что семейство $A_\alpha = (C, \alpha, \beta_0, \gamma_0, \sigma_0)$ выпукло при $\alpha > -\gamma_0 - 1$. Этот более общий результат доказывается при помощи теоремы 2.Б и теоремы I работы [3] .

2.3. Применим теорему о нуль-выпуклости к суммированию со скоростью методами $A_\alpha = (N, p^{\alpha,\beta_0}_{n}, q_n)$.

Пусть $c_\alpha = (c^\alpha_n)$ - некоторые числовые последовательности с $c_n^\alpha \neq 0$. Рассмотрим наряду с семейством $A_\alpha = (N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$ семейство методов A'_α, определенных при помощи преобразований $A'_\alpha x = (\eta_n^{'\alpha}) = (\lambda_n^\alpha \eta_n^\alpha)$, где $\lambda_n^\alpha = R_n^{\alpha,\beta_0}/c_n^\alpha$ и $(\eta_n^\alpha) = A_\alpha x$. Поскольку методы A_α и $A_{\alpha+\delta}$ связаны при любых α и $\delta > 0$ соотношением (I.5), то методы A'_α и $A'_{\alpha+\delta}$ связаны соотношением

$$\eta_n^{'\alpha+\delta} = \frac{1}{c_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta-1} c_k^\alpha \eta_k^{'\alpha} .$$

Поэтому из теоремы 2.А непосредственно следует (см. доказательство теоремы 2.I)

Теорема 2.2. Рассмотрим семейство $A_\alpha = (N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$ с $\alpha > \alpha_0$. Если $c_\alpha = (c_n^\alpha)$ - некоторые числовые последовательности с $c_n^\alpha \neq 0$, которые удовлетворяют при любых $\alpha > \alpha_0$ и $\delta \in]0;1[$ условиям

1^0 $|c_n^\alpha / c_{n+k}^\alpha| \leq N_\alpha$ для каждых n и k

и

2^0 $K_{\alpha,\delta} n^\delta \leq |c_n^{\alpha+\delta}/c_n^\alpha| \leq L_{\alpha,\delta} n^\delta$ $(n > 0)$,

то семейство методов A'_α, где $A'_\alpha x = (\lambda_n^\alpha \eta_n^\alpha)$, $\lambda_n^\alpha = R_n^{\alpha,\beta_0}/c_n^\alpha$ и $(\eta_n^\alpha) = A_\alpha x$, является нуль-выпуклым.

Теорема 2.2 является обобщением следствия I из работы [I], доказанного для методов $A_\alpha = (N, p_n^\alpha, q_n)$ при $\mathcal{E} = \mathbb{R}$.

Заметим, что условия нуль-выпуклости (2.I) и (2.2) для семейства A'_α дают нам тауберовы теоремы для методов A_α. Поскольку методы $A_\alpha = (N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$ удовлетворяют условию 2^0 теоремы 2.В, то непосредственно из теорем 2.2 и 2.В выводится следующая теорема о суммировании со скоростью.

Теорема 2.3. Если методы $A_\alpha = (N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$ и числовые последовательности $c_\alpha = (c_n^\alpha)$ с $c_n^\alpha \neq 0$ и $\alpha > \alpha_0$ удовлетворяют при любых $\alpha > \alpha_0$ и $\delta \in]0;1[$ условию

$$0 < R_n^{\alpha,\beta_0}/c_n^\alpha = \lambda_n^\alpha \uparrow \infty$$

и условиям 1^0 и 2^0 теоремы 2.2, то для методов A_α справедливы импликации (2.3)-(2.5).

3. Сильная суммируемость и сильная суммируемость со скоростью методами $(N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$

3.I. Рассмотрим семейство методов A_α с $\alpha > \alpha_0$, связанных соотношением (I.2). Пусть, далее, $t \geq 1$ - некоторое фиксированное число. Приведем понятия сильной суммируемости и сильной ограниченности методами $A_{\alpha+1}$ (см. определение 3 работы [4], а также определения 2 работы [2] и (v) работы

[6] для $\mathcal{E}=\mathbb{R}$).

Определение 3.А. Пусть методы A_α связаны соотношением (I.2). Последовательность x называется сильно $A_{\alpha+1}$-суммируемой в степени r (коротко $[A_{\alpha+1}]_r$-суммируемой) к сумме $\eta\in\mathcal{E}$, если[8]

$$\sum_{k=0}^{n} |b_k^\alpha / b_n^{\alpha+1}| [p(\eta_k^\alpha-\eta)]^r = o_p(1) \qquad (3.I)$$

при любой полунорме $p\in\mathcal{P}$, и сильно $A_{\alpha+1}$-ограниченной в степени r (коротко $[A_{\alpha+1}]_r$-ограниченной, если

$$\sum_{k=0}^{n} |b_k^\alpha / b_n^{\alpha+1}| [p(\eta_k^\alpha)]^r = O_p(1)$$

при любой полунорме $p\in\mathcal{P}$.

Приведем также понятие сильной суммируемости и сильной ограниченности со скоростью (см. [4], определение 4).

Пусть $\lambda=(\lambda_n)$- некоторая последовательность с $0<\lambda_n\nearrow$.

Определение 3.Б. Пусть методы A_α связаны соотношением (I.2). Последовательность x называется сильно $A_{\alpha+1}$-суммируемой со скоростью λ в степени r (коротко $[A_{\alpha+1}^\lambda]_r$-суммируемой), если

$$(\lambda_n)^r \sum_{k=0}^{n} |b_k^\alpha / b_n^{\alpha+1}| [p(\eta_k^\alpha-\eta)]^r = o_p(1) \qquad (3.2)$$

при любой полунорме $p\in\mathcal{P}$, и сильно $[A_{\alpha+1}^\lambda]_r$-ограниченной, если выполнены условия (3.I) и

$$(\lambda_n)^r \sum_{k=0}^{n} |b_k^\alpha / b_n^{\alpha+1}| [p(\eta_k^\alpha-\eta)]^r = O_p(1)$$

при любой полунорме $p\in\mathcal{P}$.

В частности, когда[9] $\lambda_n=O(1)$, то понятия $[A_{\alpha+1}^\lambda]_r$-суммируемости и $[A_{\alpha+1}^\lambda]_r$-ограниченности совпадают с понятием $[A_{\alpha+1}]_r$-суммируемости.

Справедлива следующая теорема (см. [4], теорема 5).

Теорема 3.А. Пусть методы A_α связаны соотношением (I.2) и $\lambda=(\lambda_n)$-числовая последовательность с $0<\lambda_n\nearrow$. Пусть, далее, выполнены условия

1° $\dfrac{|b_n^\alpha|}{(\lambda_n)^r} \le N_\alpha \dfrac{|b_{n+k}^\alpha|}{(\lambda_{n+k})^r}$ при любых n и k,

2° $b_n^\alpha / b_n^{\alpha+1} = O_\alpha(1/n) \qquad (n>0)$.

---

[8] Здесь и в дальнейшем последовательности (b_k^α) определены соотношением (I.2) и $(\eta_n^\alpha)=A_\alpha x$.

[9] В частности, когда $\lambda_n=O(1)$, мы можем, без ограничения общности, считать, что $\lambda_n=1$ при $n=0,1,\dots$.

Последовательность x является $[A^{\lambda}_{\alpha+1}]_n$-суммируемой к сумме η тогда и только тогда, когда она регулярно $A^{\lambda}_{\alpha+1}$-суммируема к η и выполнено условие

$$(\lambda_n)^n \sum_{k=0}^{n} |b_k^{\alpha}/b_n^{\alpha+1}| [p(\eta_k^{\alpha+1}-\eta_k^{\alpha})]^n = o_p(1) \qquad (3.3)$$

при любой полунорме $p \in \mathcal{P}$.

В частности когда $\lambda_n = 1$ $(n=0,1,\dots)$, то теорема 3.А превращается в теорему о $[A_{\alpha+1}]_n$-суммируемости последовательности x.

3.2. Остановимся снова на методах $A_\alpha = (N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$. Непосредственно из теоремы 3.А следует для семейства методов $[A_{\alpha+1}]_n = [N, p_n^{\alpha+1,\beta_0}, q_n]_n$ следующий результат.

Теорема 3.1. Рассмотрим семейство $A_\alpha = (N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$. Пусть выполнены условия 1° и 2° теоремы 3.А с $b_n^{\alpha} = R_n^{\alpha,\beta_0}$. Последовательность x является $[A^{\lambda}_{\alpha+1}]_n$-суммируемой к сумме η тогда и только тогда, когда она регулярно $A^{\lambda}_{\alpha+1}$-суммируема к η и выполнено условие

$$(\lambda_n)^n \sum_{k=0}^{n} |R_k^{\alpha,\beta_0}/R_n^{\alpha+1,\beta_0}| [p(\eta_k^{\alpha+1}-\eta_k^{\alpha})]^n = o_p(1) \qquad (3.4)$$

при любой полунорме $p \in \mathcal{P}$.

При помощи определения 3.Б доказывается

Теорема 3.2. Рассмотрим семейство $A_\alpha = (N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$ с $\alpha > \alpha_0$. Пусть выполнены условия 1° и 2° теоремы 3.А с $b_n^{\alpha} = R_n^{\alpha,\beta_0}$. Если последовательность x регулярно A^{λ}_{α}-суммируема к сумме η, то она и $[A^{\lambda}_{\alpha+1}]_n$-суммируема к η.

Доказательство. По предположению, последовательность x регулярно A^{λ}_{α}-суммируема к η, т.е. $\lim_n \lambda_n(\eta_n^{\alpha} - \eta) = \theta$. Поскольку, в силу условий 1° и 2° теоремы 3.А, треугольная матрица $\left((\frac{\lambda_n}{\lambda_k})^n \frac{R_k^{\alpha,\beta_0}}{R_n^{\alpha+1,\beta_0}}\right)$, где $k \le n$, переводит все 0-последовательности в o-последовательности, то

$$(\lambda_n)^n \sum_{k=0}^{n} |R_k^{\alpha,\beta_0}/R_n^{\alpha+1,\beta_0}| [p(\eta_k^{\alpha}-\eta)]^n =$$

$$= (\lambda_n)^n \sum_{k=0}^{n} |R_k^{\alpha,\beta_0}/R_n^{\alpha+1,\beta_0}| \{p[\lambda_k(\eta_k^{\alpha}-\eta)]\}^n/(\lambda_k)^n = o_p(1).$$

Таким образом, выполнено условие (3.2) при любой полунорме $p \in \mathcal{P}$ и, тем самым, последовательность x является $[A^{\lambda}_{\alpha+1}]_n$-суммируемой к η.

Заметим, что, в частности, когда $\lambda_n = 1$ $(n=0,1,\dots)$, то теорема 3.2 превращается в теорему, утверждающую $[A_{\alpha+1}]_n = [N, p_n^{\alpha+1,\beta_0}, q_n]_n$-суммируемость последовательности x.

4. Выпуклость семейства методов сильного суммирования $[N, p_n^{\alpha+1,\beta_0}, q_n]_h$

4.I. Рассмотрим семейство методов $B_\alpha = [A_{\alpha+1}]_h$ с $\alpha > \alpha_0$, введенных при помощи определения 3.А. Понятия выпуклого и нуль-выпуклого семейства B_α дает нам определение 2.А, если в нем всюду заменить символ A на B. Сформулируем теоремы о выпуклости и нуль-выпуклости семейства B_α (см. [5], теоремы Б и 2, а также лемму I и теорему 5 работы [2] для $\mathcal{E}=\mathbb{R}$).

Теорема 4.А. Пусть A_α с $\alpha > \alpha_0$ – линейные методы, связанные соотношением (I.2) и удовлетворяющие условию 2^0 теоремы 2.В. Если семейство $B_\alpha = [A_{\alpha+1}]_h$ нуль-выпукло, то оно и выпукло.

Теорема 4.Б. Если методы A_α с $\alpha > \alpha_0$ связаны соотношением (I.2), удовлетворяющим при любых $\alpha > \alpha_0$ и $\delta \in]0;1[$ условиям I^0–4^0 теоремы 2.А, то семейство $B_\alpha = [A_{\alpha+1}]_h$ является нуль-выпуклым.

4.2. Обратимся теперь к методам $B_\alpha = [A_{\alpha+1}]_h = [N, p_n^{\alpha+1,\beta_0}, q_n]_h$ с $\alpha > \alpha_0$. Заметим, что эти методы удовлетворяют по определению условию 2^0 теоремы 2.В с $a_\alpha = 1$. Мы знаем также, что если при любых $\alpha > \alpha_0$ и $\delta \in]0;1[$ выполнены условия I^0 и 2^0 теоремы 2.I, то выполнены и условия I^0–4^0 теоремы 2.А с $\beta_n^\alpha = R_n^{\alpha,\beta_0}$ (см. доказательство теоремы 2.I). Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 4.I. Если методы $A_\alpha = (N, p_n^{\alpha,\beta_0}, q_n)$ удовлетворяют при любых $\alpha > \alpha_0$ и $\delta \in]0;1[$ условиям I^0 и 2^0 теоремы 2.I, то семейство $B_\alpha = [A_{\alpha+1}]_h = [N, p_n^{\alpha+1,\beta_0}, q_n]_h$ выпукло с $\alpha > \alpha_0$.

Эта теорема является обобщением теорем о выпуклости семейств методов $[N, p_n^{\alpha+1}, q_n]_h$ и $[N, p_n^{\alpha+1}]_h$, доказанных в работах [2, 7, 10] для $\mathcal{E} = \mathbb{R}$.

Поскольку методы $A_\alpha = (C, \alpha, \beta_0, \gamma_0, \sigma_0)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.I с $\alpha > -\gamma_0$ (см. доказательство следствия 2.I), то из теоремы 4.I следует

Следствие 4.I. Семейство методов $B_\alpha = [A_{\alpha+1}]_h = [C, \alpha+1, \beta_0, \gamma_0, \sigma_0]_h$ выпукло при $\alpha > -\gamma_0$.

В заключение заметим, что условия, наложенные на доказанные здесь теоремы 2.I, 2.2, 2.3 и 4.I, не являются ограничениями на ЛВП $\mathcal{E}$. Поэтому эти теоремы и их следствия 2.I и 4.I справедливы при любом ЛВП $\mathcal{E}$, т.е. относительно класса всех ЛВП.

Литература

1. Тали А. О нуль-выпуклых семействах методов суммирования //Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981. №504. С.48-57.
2. Тали А. Некоторые примеры выпуклых и нуль-выпуклых семейств методов суммирования //Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1982. №596. С.90-104.
3. Тали А. Выпуклые семейства методов суммирования в локально выпуклых пространствах //Тез. докл. конференции "Методы алгебры и анализа", Тарту, 1983. С.61-63.
4. Тали А. Взаимоотношения между сильной и обыкновенной суммируемостями со скоростью в локально выпуклых пространствах //Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987. №770. С.69-79.
5. Тали А. Выпуклость одного семейства обобщенных методов суммирования Нёрлунда //Тез. докл. конференции "Методы алгебры и анализа", Тарту, 1988. С.109-112.
6. Borwein, D. On strong and absolute summability //Proc. Glasgow Math. Assoc. 1960, N.4. P.122-139.
7. Cass, F.P. Convexity theorems for Nörlund and strong Nörlund summability //Math. Z. 1969, V.112. N.5. P.357-363.
8. Das, G., Panda, K., Sahoo, S. On two new methods of summability //Indian J. Pure Appl. Math. 1984, V.15. N.12. P.1340-1351.
9. Sinha, R. Convexity theorem for (N, p, q) summability //Kyungpook Math. J. 1973, N.13. P.37-40.
10. Sinha, R. Convexity theorem for [N, p, q] summability //Kyungpook Math. J. 1975, N.15. P.65-79.

Поступило 17.05.88

A NEW FAMILY OF GENERALIZED NÖRLUND SUMMABILITY METHODS

A. Tali

Summary

Let $\mathcal{E}$ be a locally convex space on $\mathbb{C}$ (or $\mathbb{R}$) and $X=(\xi_n)$ $(n=0,1,\ldots)$ be a sequence where $\xi_n\in\mathcal{E}$. Also let $(A_n^{\alpha,\beta})$ be a real sequence formally defined by the power series

$$(1-z)^{-(\alpha+1)}\left(\log\frac{e}{1-z}\right)^{\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{\alpha,\beta}z^n$$

$(\alpha,\beta,z\in\mathbb{R})$.

The generalized Nörlund summability methods $A_\alpha=(N,p_n^{\alpha,\beta_0},q_n)$ are defined by sequence-to-sequence transformations of X into $A_\alpha X=(\eta_n^\alpha)$ where

$$\eta_n^\alpha=\frac{1}{R_n^{\alpha,\beta_0}}\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}^{\alpha,\beta_0}q_k\xi_k,$$

$$R_n^{\alpha,\beta}=\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}^{\alpha,\beta_0}q_k\neq 0,\quad p_n^{\alpha,\beta_0}=\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1,\beta_0}p_k,\quad p_n,q_n\in\mathbb{C}$$

and $\beta_0 \in \mathbb{R}$.
These summability methods are the generalizations of the methods (N, p_n^{α}), (N, p_n^{α}, q_n) [7, 9, 5] and $(C, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ [8]. The strong summability methods $B_{\alpha} = [N, p_n^{\alpha+1, \beta_0}; q_n]_{\kappa}$ are defined too (definition 3.A).

Main results of the paper are convexity theorems 2.1 and 4.1 for the families of methods $A_{\alpha} = (N, p_n^{\alpha, \beta_0}, q_n)$ and $B_{\alpha} = [N, p_n^{\alpha+1, \beta_0}, q_n]_{\kappa}$. These theorems generalize the convexity theorems known from papers [7, 9, 10]. The convexity theorem 2.1 is applied to the $(N, p_n^{\alpha, \beta_0}, q_n)$-summability with rapidity (theorem 2.3).

The relations between strong and ordinary $(N, p_n^{\alpha, \beta_0}, q_n)$-summabilities with rapidity are characterized too (theorems 3.1 and 3.2).

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989, 846, 99-105

ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ И ИХ ЯДРА

Л. Лооне

Тартуский государственный университет

Пусть $A_m=(a_{mnk})$ — числовые матрицы для любого $m=0,1,\dots$. Говорят, что числовая последовательность $x=(\xi_k)$ суммируема α-методом (A_m) к числу a, если равномерно относительно n существует предел

$$\lim_m \sum_k a_{mnk}\xi_k = a.$$

Понятие α-метода (или последовательностного метода) суммирования введено Питерсеном (см.[3]).

Пусть Q — множество всевозможных операторов $q: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ и пусть $B_q=(a_{mq(m)k})$. Значит, для любого $q\in Q$ матрица B_q имеет первым рядом какой-то ряд матрицы A_1 вторым рядом какой-то ряд матрицы A_2 и.т.д. Питерсеном доказана следующая теорема (см.[3]).

Теорема 1. Последовательность $x=(\xi_k)$ α-суммируема к числу a тогда и только тогда, когда она суммируема к a каждым методом суммирования B_q, где $q\in Q$.

Пусть m — пространство ограниченных последовательностей $x=(\xi_k)$ с нормой

$$\|x\| = \sup_n |\xi_n|.$$

Пусть K^c — множество всех таких непрерывных линейных функционалов f на m, которые удовлетворяют условиям

1^0 $\langle e_k, f\rangle = 0 \quad \forall k=0,1,\dots,$

2^0 $\langle e, f\rangle = 1,$

3^0 $\|f\| = 1.$

Здесь $e=(1,1,\dots,1,\dots)$, $e_k=(\overbrace{0,\dots,0}^{k},1,0,\dots)$. Оказывается, что множество K^c определяет ядро Кноппа. Значит, ядро Кноппа для любого $x\in m$ — это множество

$$K^c(x)=\{\langle x,f\rangle : f\in K^c\}$$

(см.[1]).

Как известно, ядро Кноппа для последовательности $x=(\xi_k)$ — это замкнутая линейная оболочка ее предельных точек. Последовательность $x=(\xi_k)$ сходиться к числу a тогда и только тогда, когда ее ядро $K^c(x)$ состоит точно из одной точки a, т.е. $K^c(x)=\{a\}$. Последовательность x суммируема матричным методом A тогда и только тогда, когда $K^c(Ax)$ состоит точно из одной точки. Имея это ввиду, говорят, что множество ${}^tA(K^c)$ определяет матричный метод суммирования A. Здесь

$$ {}^tA(K^c)=\{{}^tA\xi : \xi\in K^c\}, $$

где ${}^tA$ — сопряженный оператор к A как к линейному и непрерывному оператору в m. Значит, ${}^tA$ — это транспонированная матрица к матрицу A. На основании теоремы 1, нами введено понятие ядра $K_\alpha(x)$. Этим ядром является ядро

$$ K_\alpha(x)=\{\langle x,\xi\rangle : \xi\in K_\alpha\}, $$

где

$$ K_\alpha = \operatorname{clco}\bigcup\{{}^tB_q(K^c) : q\in Q\}. $$

Тут символ "clco" обозначает замкнутую выпуклую оболочку. Это ядро определяет α-суммируемость в пространстве m, т.е. последовательность x α-суммируема к a тогда и только тогда когда $K_\alpha(x)=\{a\}$ (см.[2]).

Пусть $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел и пусть $U_-(\tau_0)$ — некоторая левая окрестность точки $\tau_0\in\mathbb{R}$. Пусть для любой $\tau\in U_-(\tau_0)$ определена матрица $A(\tau)=(a_{nk}(\tau))$, причем

$$ \sup_n \sum_k |a_{nk}(\tau)|<\infty \quad \forall\tau\in U_-(\tau_0). $$

Значит, для любого зафиксированного $\tau\in U_-(\tau_0)$ матрица $A(\tau)$ определяет оператор из m в m.

<u>Определение 1.</u> Говорят, что последовательность $x=(\xi_k)$ суммируема полунепрерывным последовательностным методом суммирования $(A(\tau))$ (короче — $\alpha(\tau)$-суммируема) к числу a, если равномерно относительно n существует предел

$$ \lim_{\tau\to\tau_0}\sum_k a_{nk}(\tau)\xi_k = a. \qquad (1) $$

Множество всех $\alpha(\tau)$-суммируемых последовательностей обозначается через $c_{\alpha(\tau)}$.

Полунепрерывный $\alpha(\tau)$-метод суммирования называется регулярным если из $x\in c$ следует $x\in c_{\alpha(\tau)}$, причем предел сохраняется.

Если $a_{nk}(\tau)=a_{k}(\tau)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ то $\alpha(\tau)$-суммируемость является суммируемостью полунепрерывным методом суммирования.

Пусть W – множество всевозможных последовательностей точек из $\mathcal{U}\setminus(\tau_0)$ которые сходятся к τ_0 т.е.

$$W=\{w=(\tau_m):\tau_m\to\tau_0,\ \tau_m\in\mathcal{U}\setminus(\tau_0)\ \forall m\in\mathbb{N}\}.$$

Каждый элемент $w=(\tau_m)$ из множества W определяет α-метод суммирования (A_m) с $A_m=A(\tau_m)$. Если последовательность x суммируема этим α-методом, то говорим что оно w-суммируема.

Теорема 2. Последовательность $x=(\xi_k)$ $\alpha(\tau)$-суммируема к числу a тогда и только тогда, когда она w-суммируема к a для любого $w\in W$.

Доказательство вытекает из определения предела по Гейне.

Пусть K_w – множество, опеределяющее ядро для α-метода $(A(\tau_m))$, где $w=(\tau_m)$.

Следствие 2.I. Последовательность $x=(\xi_k)$ $\alpha(\tau)$-суммируема к числу a тогда и только тогда, когда

$$K_w(x)=\{a\} \qquad \text{для любого} \quad w\in W$$

Доказательство вытекает из того факта, что последовательность w-суммируема к числу a тогда и только тогда когда $K_w(x)=\{a\}$ (см.[2]).

Опираясь на теорему 2 определяем понятие ядра для полунепрерывного последовательностного метода суммирования (короче – для $\alpha(\tau)$-метода).

Определение 2. Ядром $\alpha(\tau)$-метода $(A(\tau))$ называется ядро, определяемое множеством

$$K=cl\,co\,\bigcup\{K_w:\ w\in W\}. \tag{2}$$

Теорема 3. Множество всех $\alpha(\tau)$-суммируемых последовательностей $c_{\alpha(\tau)}$ совпадает с множеством всех сходящихся элементов по ядру $\alpha(\tau)$-метода $(A(\tau))$.

Доказательство. Так как

$$\bigcup\{K_w:\ w\in W\}\subset K,$$

то по следствию 2.I из $K(x)=\{a\}$ следует, что последовательность x $\alpha(\tau)$-суммируема к числу a. Докажем обратное следование. Пусть x $\alpha(\tau)$-суммируема к числу a и пусть $l\in K(x)$. Следовательно, найдутся последовательности (g_n) и (h_n) из множества

$$\bigcup\{K_w:\ w\in W\}$$

и последовательность (λ_n) с $0\le\lambda_n\le 1$ для любого n, такие что

$$\lim_{n} \langle x, \lambda_n y_n + (1-\lambda_n) h_n \rangle = b$$

Так как для любого $n \in N$ имеют место $\langle x, y_n \rangle = a$ и $\langle x, h_n \rangle = a$, то $b = a$. Так как b – произвольный элемент из $K(x)$, то $K(x) = \{a\}$. Значит, последовательность x сходится по ядру к числу a. Теорема доказана. Из доказательства теоремы 3 вытекает

Следствие 3.I. Для любого $x \in c_{\alpha(\tau)}$ из равенства (I) вытекает равенство

$$K(x) = \{a\}.$$

Следствие 3.2. Ядром, которое определяет полунепрерывный матричный метод суммирования $A = (a_k(\tau))$ является ядро, определяемое множеством

$$K_A = \mathrm{clc} \bigcup \{ {}^t B_{\omega}(K^0) : \omega \in W \}, \tag{3}$$

где $B_{\omega} = (b_{mk})$ с $b_{mk} = a_k(\tau_m)$.

Доказательство вытекает из следствия 3.I. Действительно, множество K в определении 2 имеет в данном случае вид (3), так как

$$K_{\omega} = {}^t B_{\omega}(K^0).$$

Кроме того, α-метод (A_{ω}) где $A_{\omega} = (a_k(m))$ совпадает обыкновенным матричным методом $B_{\omega} = (b_{mk})$ с $b_{mk} = a_k(\tau_m)$.

Теорема 4. Полунепрерывный $\alpha(\tau)$-метод суммирования является регулярным тогда и только тогда, когда

I^0 $\lim\limits_{\tau \to \tau_0^-} \sup\limits_{n} |a_{nk}(\tau)| = 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots,$

2^0 $\lim\limits_{\tau \to \tau_0^-} \sum\limits_{k} |a_{nk}(\tau)| = 1$ равномерно относительно n,

3^0 $\sup\limits_{n} \sum\limits_{k} |a_{nk}(\tau)| < M$ для любого $\tau \in U_-(\tau_0)$.

Доказательство вытекает из теоремы 2, если применить необходимые и достаточные условия для регулярности α-методов (см. [2]).

Теорема 5. Включение

$$K(x) \subset K^0(x) \quad \forall x \in m \tag{4}$$

имеет место тогда и только тогда когда

I^0 $\alpha(\tau)$ – метод регулярен,

2^0 $\lim\limits_{\tau \to \tau_0^-} \sup\limits_{n} \sum\limits_{k} |a_{nk}(\tau)| = 1 \tag{5}$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение (4) равносильно включению $K\subset K^c$. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $K\subset K^c$. Следовательно, $K(x)=K^c(x)$ для любого $x\in c$ т.е. $\alpha(\tau)$ -

-метод регулярен. Из включения $K\subset K^c$ вытекает, что $K_w\subset$ $\subset K^c$ для любого $w\in W$ Следовательно

$$\lim_m \sup_n \sum_k |a_{nk}(\tau_m)| = 1 \quad \forall (\tau_m)\subset W,$$

(см. [2]).

По определению предела по Гейне получаем, что имеет место (5).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если $\alpha(\tau)$-метод регулярен и имеет место (5), то, для любого (τ_m) из W, α-метод $(A(\tau_m))$ является ядерно-регулярным (см. [2]). Следовательно,

$$K_w\subset K^c \quad \forall w\in W$$

Так как K^c является выпуклым и замкнутым множеством, то

$$cl\, \bigcup\{K_w : w\in W\}\subset K^c,$$

т.е. $K\subset K^c$. Теорема доказана. Прямым образом получаем следующее

Следствие 5.I. Для полунепрерывного матричного метода $A=(a_k(\tau))$ включение

$$K_A(x)\subset K^c(x) \quad \forall x\in m \tag{6}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

I° метод A регулярен, (7)

2° $\lim\limits_{\tau\to\tau_c} \sum\limits_k |a_k(\tau)| = 1.$ (8)

Пусть $L(x)$ — множество всех банаховых пределов для x, т.е. $L(x)$ является ядром почти-сходимости для последовательности x (см. [2]).

Теорема 6. Включение

$$K_\alpha(x)\subset L(x) \quad \forall x\in m \tag{9}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

I° $\alpha(\tau)$-метод регулярен,

2° $\lim\limits_{\tau\to\tau_c} \sup\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}(\tau)| = 1,$

3° $\lim\limits_{\tau\to\tau_c} \sup\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}(\tau)-a_{nk+1}(\tau)| = 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 6. Оно опирается на необходимые и достаточные условия для $K_\alpha\subset L$ (см. [2]).

Литература

I. Лооне Л. О ядрах элемента отделимого локально выпуклого пространства // Уч. зап. Тарт. ун-та, 1971. Т. 277. С. 125-135.

2. Лооне Л. Ядро α-суммируемости Питерсена // Уч. зап. Тарт. ун-та, 1978. Т. 448. С. 46-51.

3. Petersen, G.M. Almost convergence and uniformly distributed sequences // Quart. J. Math., 1956, 7, 188-191.

Поступило 03.II.88

SEMICONTINUOUS SEQUENTIAL SUMMABILITY METHODS AND THEIR CORES

L. Loone

Summary

Let $A_m = (a_{mnk})$ be matrices, where $a_{mnk} \in \mathbb{R}$. A sequence $x = (\xi_k)$ is called α-summable to a if

$$\lim_m \sum_k a_{mnk} \xi_k = a \qquad \text{uniformly in } n$$

(see[3]). The core of this α-method is defined in [2]. It is determined by the set K_α (see the formulae on the page 92).

Let $\tau_0 \in \mathbb{R}$ and let $\mathcal{U}_-(\tau_0)$ be a left neighbourhood of τ_0. Let $A(\tau) = (a_{nk}(\tau))$ be a matrix and let

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}(\tau)| < \infty \qquad \forall \tau \in \mathcal{U}_-(\tau_0).$$

We call a sequence $x = (\xi_k)$ $\alpha(\tau)$-summable to a if

$$\lim_n \sum_k a_{nk}(\tau) \xi_k = a \qquad \text{uniformly in } n.$$

Let W be a set of all sequences $w = (\tau_m) \subset \mathcal{U}_-(\tau_0)$ such that $\tau_m \to \tau_0$. Let K_w be the set that determines the core of $\alpha(\tau)$-method $A = ($

<u>Theorem 2.</u> A sequence $x = (\xi_k)$ is $\alpha(\tau)$-summable to a iff it is w-summable to a for every $w \in W$.

In view of this theorem the core of $\alpha(\tau)$-method can be defined as a core which is determined by the set K (see formulae (2)). The set of sequences convergent by this core is the set of all $\alpha(\tau)$-summable sequences (see Theorem 3 and corollary 3.1).

Using the theorem 2 and the results of the paper [2] the author gives the necessary and sufficient conditions for the regularity of $\alpha(\tau)$-method (see Theorem 4). The necessary and sufficient conditions for inclusions (4),(6)

and (9) are also given. In those inclusions $K^c(x)$ denotes the Knopp's core of x, $K(x)$ denotes the $\varkappa(\tau)$-core of x, $K_A(x)$ denotes the core for summability method $A = (a_k(\tau))$ of x and $L(x)$ denotes the set of all Banach limits of x.

For example

Theorem 6. The inclusion

$$K(x) \subset L(x) \quad \forall\, x \in m$$

holds iff

1° $\varkappa(\tau)$-method is regular,

2° $\lim\limits_{\tau \to \tau_0^-} \sup\limits_{n} \sum\limits_{k} |a_{nk}(\tau)| = 1,$

3° $\lim\limits_{\tau \to \tau_0^-} \sup\limits_{n} \sum\limits_{k} |a_{nk}(\tau) - a_{nk+1}(\tau)| = 0.$

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989,846,106-117

ОБ УСЛОВИИ ЧЕЗАРО-СУММИРУЕМОСТИ И ЧЕЗАРО-ОГРАНИЧЕННОСТИ ПО ОТРЕЗКАМ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ДВОЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ ФУРЬЕ

И. Лепассон

Тартуский государственный университет

В настоящей статье обобщаются проблемы, изученные Бунтинасач ([5]) на двойные последовательности и на двойные ряды Фурье.

Важную роль в теории рядов Фурье играют Чезаро-суммируемость[1] по отрезкам (TK) и Чезаро-ограниченность по отрезкам (TB). В настоящей статье исследуются условия Чезаро-суммируемости по отрезкам в FK-пространстве двойных последовательностей. Доказано, что FK-пространство E является TB-пространством тогда и только тогда, когда $E = q \cdot E$ где $q = \{x : \|x\|_q = \sum_{k,l=0}^{\infty,\infty} (k+1)(l+1)|\Delta_{kl}^2 x_{kl}| + \sup_k \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)|\Delta_l^2 x_{kl}| + \sup_l \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)|\Delta_k^2 x_{kl}| + \sup_{k,l} |x_{kl}| < \infty\}$. E является TK-пространством тогда и только тогда, когда $q_0 \cdot E = E_{TK} = \{x \in E : x$ имеет свойство $TK\}$, где $q_0 = q \cap c_0$.

В § 3 применяются теоремы, полученные в § 2 для изучения мультипликаторов и в § 4 для изучения рядов Фурье.

§ 1. Обозначения и определения

Пусть

E – локально выпуклое пространство последовательностей с хаусдорфовой топологией;

ω – пространство всех двойных последовательностей[2] $x = (x_{kl})$;

---

[1] Всюду $T = C^{11}$

[2] Если область изменения m, n не показано, то $m, n = 0, 1, 2, \ldots$

e^{mn} – последовательность $(\sigma^{mn}_{k\ell})$, где $\sigma^{mn}_{mn}=1$, а остальные элементы нули;

E_{AD} – линейная оболочка множества $\{e^{mn}\}$;

$$P^{mn}=\sum_{k,\ell=0}^{m,n} e^{k\ell};$$

$$\sigma^{mn}=\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{k,\ell=0}^{m,n} P^{k\ell}=\sum_{k,\ell=0}^{m,n}\left(1-\frac{k}{m+1}\right)\left(1-\frac{\ell}{n+1}\right)e^{k\ell};$$

$$P=\{P^{mn}\};\ \sigma=\{\sigma^{mn}\};$$

$$m_T=\left\{x\in\omega:\|x\|_{m_T}=\sup_{m,n}\left|\sum_{k,\ell=0}^{m,n}\left(1-\frac{k}{m+1}\right)\left(1-\frac{\ell}{n+1}\right)x_{k\ell}\right|<\infty\right\};$$

$$C_T=\left\{x\in\omega;\ \exists\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k,\ell=0}^{m,n}\left(1-\frac{k}{m+1}\right)\left(1-\frac{\ell}{n+1}\right)x_{k\ell}\right\};$$

$$x\cdot y=(x_{k\ell}\cdot y_{k\ell}),\ \text{ где }\ x=(x_{k\ell})\ \text{ и }\ y=(y_{k\ell});$$

$$A\cdot S=\{x\cdot y: x\in A,\ y\in S\};$$

$$P^{mn}x=\sum_{k,\ell=0}^{m,n}x_{k\ell}e^{k\ell};\ \sigma^{mn}x=\sum_{k,\ell=0}^{m,n}\left(1-\frac{k}{m+1}\right)\left(1-\frac{\ell}{n+1}\right)x_{k\ell}e^{k\ell};$$

$$P\cdot x=\{P^{mn}x\};\ \sigma\cdot x=\{\sigma^{mn}\cdot x\}.$$

Последовательность $P^{mn}\cdot x$ называем отрезком последовательности x, а $\sigma^{mn}\cdot x$ – ее чезаровским отрезком. Пространство E называется K-пространством, если $f_{k\ell}(x)=x_{k\ell}$ является непрерывным функционалом. K-пространство Фреше называется FK-пространством и банахово K-пространство – BK-пространством.

Введем еще обозначения:

$E_{TB}=\{x\in\omega \mid \sigma\cdot x$ – ограниченное множество в $E\}$;

$E_{TK}=\{x\in E: \sigma\cdot x\subset E$ и $\lim\limits_{m,n}(\sigma^{mn}x)\to x\}$.

Будем говорить, что x обладает свойством

TB, если $x\in E_{TB}$ (x – Чезаро-ограничена по отрезкам в E);

TK если $x\in E_{TK}$ (x – Чезаро-суммируема по отрезкам в E).

Пространство называется TB-пространством (соответственно TK-пространством), если $E\subset E_{TB}$ (соответственно $E=E_{TK}$).

Если E является FK-пространством, тогда из определении вытекают непосредственно следующие соотношения: $E_{TK} \subset E_{TB}$.

В пространстве E_{TK} определяют полунормы

$$p_{TK}(x) = \sup_{m,n} p(\sigma^{mn}, x)$$

В дальнейшем применяем обозначения:

$$\Delta_k \lambda_{kl} = \lambda_{kl} - \lambda_{k+1,l};\ \Delta_{kl}\lambda_{kl} = \Delta_k(\Delta_l \lambda_{kl}) = \lambda_{kl} - \lambda_{k+1,l} - \lambda_{k,l+1} + \lambda_{k+1,l+1};\ \Delta^{22}_{kl}\lambda_{kl} = \Delta^2_k(\Delta^2_l \lambda_{kl}) = \Delta_{kl}\lambda_{kl} - \Delta_{kl}\lambda_{k+1,l} - \Delta_{kl}\lambda_{k,l+1} + \Delta_{kl}\lambda_{k+1,l+1}.$$

Из преобразования Абеля (см.[3], стр. 63) следует

Лемма I.I. Для всех $\lambda \in \omega$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}
P^{mn}\lambda = & \sum_{k,l=0}^{m-1,n-1}(k+1)(l+1)(\Delta^{22}_{kl}\lambda_{kl})\sigma^{kl} + \\
& + n\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)[\Delta_k(\Delta_{kl}\lambda_{kn})]\sigma^{k,n-1} + \\
& + m\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)[\Delta_l(\Delta_{kl}\lambda_{ml})]\sigma^{m-1,l} + \\
& + \sum_{k=0}^{m-1}(\Delta_k\lambda_{kn})P^{kn} + \sum_{l=0}^{n-1}(\Delta_l\lambda_{ml})P^{ml} + \\
& + mn[\Delta_k(\Delta_{kl}\lambda_{m-1,n-1})]\sigma^{m-1,n-1} + \\
& + mn(\Delta_{kl}\lambda_{m-1,n})\sigma^{m-1,n-1} + \lambda_{mn}P^{mn} = \\
= & \sum_{k,l=0}^{m-1,n-1}(k+1)(l+1)(\Delta^{22}_{kl}\lambda_{kl})\sigma^{kl} + \\
& + (n+1)\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)(\Delta_k\lambda_{kn})\sigma^{kn} + \\
& + (m+1)\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)(\Delta_l\lambda_{ml})\sigma^{ml} + \\
& + n\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)(\Delta_k\lambda_{k,n+1} - \Delta_{kl}\lambda_{k+1,n})\sigma^{k,n-1} + \\
& + m\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)(\Delta_l\lambda_{m+1,l} - \Delta_{kl}\lambda_{m,l+1})\sigma^{m-1,l} + \\
& + mn[\Delta_k(\Delta_{kl}\lambda_{m-1,n-1})]\sigma^{m-1,n-1} +
\end{aligned}$$

$$+ mn(\Delta_{K\ell}\lambda_{m-1,n})\sigma^{m-1,n-1} + \lambda_{mn}[(m+1)(n+1)\sigma^{mn} -$$
$$- m(n+1)\sigma^{m-1,n} - (m+1)n\sigma^{m,n-1} + mn\sigma^{m-1,n-1}].$$

Теорема I.2. Пространство m_T является BK-пространством и TB-пространством, причем

$$m_T = (m_T)_{TB}. \qquad (I)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пространство m_T является BK-пространством (см.[4]). Чтобы доказать равенство (I) достаточно доказать неравенство

$$\|X\|_{m_T} \leq \sup_{m,n} \|\sigma^{mn} X\|_{m_T} \leq M \|X\|_{m_T}, \quad \forall X \in m_T.$$

Пусть

$$s(y) = \Big|\sum_{K,\ell=0}^{\infty,\infty} y_{K\ell}\Big|, \quad y \in E_{AD},$$

тогда

$$\|X\|_{m_T} = \sup_{m,n} s(\sigma^{mn} X) = \sup_{m,n} \lim_{t,v\to\infty} s(\sigma^{tv}\sigma^{mn} X) \leq \sup_{m,n} \|\sigma^{mn} X\|_{m_T}.$$

Покажем, что и вторая половина неравенства имеет место. Пусть $\lambda = \sigma^{mn}\cdot\sigma^{tv}$ тогда по лемме I.I

$$\sup_{m,n} \|\sigma^{mn} X\|_{m_T} = \sup_{\substack{m\leq t\\ n\leq v}} s(\sigma^{mn}\cdot\sigma^{tv} X) =$$

$$= \sup_{\substack{m\leq t\\ n\leq v}} s\Big\{\sum_{K,\ell=0}^{m-1,n-1} (K+1)(\ell+1)(\Delta^{2\,2}_{K\ell}\lambda_{K\ell})(\sigma^{K\ell} X) +$$
$$+ (n+1)\sum_{K=0}^{m+1} (K+1)(\Delta_K \lambda_{Kn})(\sigma^{Kn} X) +$$
$$+ (m+1)\sum_{\ell=0}^{n+1} (\ell+1)(\Delta_\ell \lambda_{m\ell})(\sigma^{m\ell} X) +$$
$$+ n\sum_{K=0}^{m-1} (K+1)(\Delta_K \lambda_{K,n+1} - \Delta_{K\ell}\lambda_{K+1,n})(\sigma^{K,n-1} X) +$$
$$+ m\sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1)(\Delta_\ell \lambda_{m+1,\ell} - \Delta_{K\ell}\lambda_{m,\ell+1})(\sigma^{m-1,\ell} X) +$$
$$+ mn(\Delta_{K\ell}\lambda_{m-1,n})(\sigma^{m-1,n-1} X) +$$
$$+ mn[\Delta_K(\Delta_{K\ell}\lambda_{m-1,n-1})](\sigma^{m-1,n-1} X) +$$
$$+ \lambda_{mn}[(m+1)(n+1)(\sigma^{mn} X) -$$

$$-m(n+1)(\sigma^{m-1,n}x)-(m+1)n(\sigma^{m,n-1}x)+mn(\sigma^{m-1,n-1}x)]\} \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{m\leq t\\ n\leq s}}\Big\{\sum_{k,l=0}^{m-1,n-1}(k+1)(l+1)\Delta_{kl}^{22}\lambda_{kl}+$$

$$+(n+1)\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\Delta_k\lambda_{kn}+(m+1)\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)\Delta_l\lambda_{ml}+$$

$$+n\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)(\Delta_k\lambda_{k,n+1}-\Delta_{kl}\lambda_{k+1,n})+$$

$$+m\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)(\Delta_l\lambda_{m+1,l}-\Delta_{kl}\lambda_{m,l+1})+$$

$$+mn\Delta_{kl}\lambda_{m-1,n}+mn[\Delta_k(\Delta_{kl}\lambda_{m-1,n-1})]+$$

$$+\lambda_{mn}\Big\}\sup_{k,l} s(\sigma^{kl}x)\leq$$

$$\leq M\sup_{k,l} s(\sigma^{kl}x)=M\|x\|_{m_T}.$$

Такое M существует. Это следует из теоремы 8 статьи [2]. Теорема I.2 доказана.

Теорема I.3. Пространство c_T является BK-пространством и TK-пространством.

Доказательство. Пространство c_T является BK-пространством (см. [4]). Пространство c_T является TK-пространством тогда и только тогда, когда c_T является TB-пространством ([6], 3.4). А в том что c_T является TB-пространством, можно убедиться аналогично как при m_T в доказательстве теоремы I.2.

Теорема I.4. Пространство q является BK-пространством и TB-пространством.

Доказательство аналогичное к случаю простых последовательностей ([7], стр. 458).

Единичные шары в пространствах q и q_0 будем обозначать соответственно символами Q и Q_0.

2. Необходимые и достаточные условия для Чезаро-суммируемости и Чезаро-ограниченности по отрезкам

Теорема 2.I. Если $\sigma X\subset E$, то

$$p_{TK}(x) \sim \sup_{m,n} p_{TK}(\sigma^{mn}x) = \sup_{\lambda \in Q} p_{TK}(\lambda \cdot x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношение эквивалентности

$$p_{TK}(x) \sim \sup_{m,n} p_{TK}(\sigma^{mn} x)$$

следует из доказательства теоремы I.2, если $p(x)$ заменить полунормой $p(x)$. Если $\lambda \in Q$ то по теореме I.I

$$p(\lambda \cdot \sigma^{mn} x) = \lim_{\mu,\nu \to \infty} p(P^{\mu\nu} \lambda \cdot \sigma^{mn} \cdot x) =$$

$$= \lim_{\mu,\nu \to \infty} p\Big\{ \sum_{k,l=0}^{\mu-1,\nu-1} (k+1)(l+1)(\Delta^{22}_{kl} \lambda_{kl})(\sigma^{kl} \sigma^{mn} x) +$$

$$+ \nu \sum_{k=0}^{\mu-1} (k+1)[\Delta_k(\Delta_{kl} \lambda_{k\nu})](\sigma^{k,\nu-1} \sigma^{mn} x) +$$

$$+ \mu \sum_{l=0}^{\nu-1} (l+1)[\Delta_l(\Delta_{kl} \lambda_{\mu l})](\sigma^{\mu-1,l} \sigma^{mn} x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\mu-1} (\Delta_k \lambda_{k\nu})(\sigma^{mn} x) + \sum_{l=0}^{\nu-1} (\Delta_l \lambda_{\mu l})(\sigma^{mn} x) +$$

$$+ \mu\nu(\Delta_{kl} \lambda_{\mu-1,\nu})(\sigma^{\mu-1,\nu-1} \sigma^{mn} x) +$$

$$+ \mu\nu[\Delta_k(\Delta_{kl} \lambda_{\mu-1,\nu-1})](\sigma^{\mu-1,\nu-1} \sigma^{mn} x) + \lambda_{mn}(\sigma^{mn} x),$$

где P^{mn} можем опускать, поскольку m и n большие по сравнению с μ и ν. Итак,

$$p(\lambda \cdot \sigma^{mn} x) \leq \lim_{\mu,\nu \to \infty} \Big\{ \sum_{k,l=0}^{\mu-1,\nu-1} (k+1)(l+1) |\Delta^{22}_{kl} \lambda_{kl}| +$$

$$+ \nu \sum_{k=0}^{\mu-1} (k+1) |\Delta_k(\Delta_{kl} \lambda_{kl})| + \mu \sum_{l=0}^{\nu-1} (l+1) |\Delta_l(\Delta_{kl} \lambda_{\mu l}| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\mu-1} |\Delta_k \lambda_{k\nu}| + \sum_{l=0}^{\nu-1} |\Delta_l \lambda_{\mu l}| + \mu\nu |\Delta_{kl} \lambda_{\mu-1,\nu}| +$$

$$+ \mu\nu |\Delta_k(\Delta_{kl} \lambda_{\mu-1,\nu-1})| + |\lambda_{\mu\nu}| \Big\} p_{TK}(x).$$

Учитывая, что (см. [2])

$$|\Delta_k \lambda_{mn}| \leq \sum_{\nu=m}^{\infty} |\Delta^2_k \lambda_{\nu n}| \leq \frac{1}{m+1} \sum_{\nu=m}^{\infty} (\nu+1) |\Delta^2_k \lambda_{\nu n}|,$$

можем писать

$$\lim_{\mu,\nu \to \infty} \Big\{ \sum_{k,l=0}^{\mu-1,\nu-1} (k+1)(l+1) |\Delta^{22}_{kl} \lambda_{kl}| + \sum_{k=0,l=\nu}^{\mu-1,\infty} (k+1)(l+1) |\Delta^{22}_{kl} \lambda_{kl}| +$$

$$+\sum_{k=\mu,l=0}^{\infty,\nu-1}(k+1)(l+1)|\Delta_{kl}^{22}\lambda_{kl}|+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta_k^2\lambda_{k\nu}|+$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)|\Delta_l^2\lambda_{\mu l}|+\sum_{k=\mu-1,l=\nu}^{\infty,\infty}(k+1)(l+1)|\Delta_{kl}^{22}\lambda_{kl}|+$$

$$+\sum_{l=\nu-1}^{\infty}(l+1)(\mu+1)|\Delta_{kl}^{22}\lambda_{\mu-1,l}|+|\lambda_{\mu\nu}|\Big\}p_{TK}(x)\le\|\lambda\|_{q_0}p_{TK}(x).$$

Следовательно,

$$\sup_{m,n} p_{TK}(\lambda\cdot X)\le p_{TK}(X),$$

тем самым теорема доказана.

Из теоремы 2.I непосредственно следует

Теорема 2.2. Если E пространство последовательностей, то

$$E_{TB}=q\cdot E_{TB}.$$

Теорема 2.3. Если E – секвенциальна полное пространство последовательностей, то

$$E_{TK}\supset(E_{TB})_{TK}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что последовательность $(\sigma^{mn}X)$ является последовательностью Коши в пространстве E_{TB}. Если она является последовательностью Коши в пространстве E_{TB} тогда она и последовательность Коши в пространстве последовательностей E. Для всех полунорм p имеет место неравенство

$$p(\sigma^{mn}X-\sigma^{st}X)=\lim_{k,l\to\infty}p(\sigma^{kl}(\sigma^{mn}X-\sigma^{st}X))\le$$
$$\le p_{TK}(\sigma^{mn}X-\sigma^{st}X).$$

Из этого и следует утверждение теоремы.

Теорема 2.4. Если E является FK-пространством, который содержит множество σX то следующие утверждение равносильны:

(a) $X\in E_{TB}$;

(b) $y\in m_T$, где $y=(y_{kl}),\ y_{kl}=f(Xe^{kl}),\ f\in E'$;

(c) $q_0\cdot X\subset E_{TK}$;

(d) $q_0\cdot X\subset E$;

(e) $Q_0\ X$ является ограниченным подмножеством в пространстве E;

(f) $Q\cdot X$ является ограниченным подмножеством в пространстве E_{TB}.

Доказательство. $(d) \Rightarrow (c)$: Пусть $\tilde{\mathfrak{I}}: q_0 \to E$ определен равенством $\mathfrak{I}(\lambda) = \lambda \cdot x$ Так как E является K-пространством, то оператор $\mathfrak{I}$ имеет замкнутый график. По теореме о замкнутом графике $\mathfrak{I}$ является непрерывным. Так как q_0 является TK-пространством, то для каждого $\lambda \in q_0$ имеем

$$\sigma^{mn} \lambda x = \mathfrak{I}(\sigma^{mn} x) \to \mathfrak{I}(\lambda) = \lambda \cdot x.$$

$(c) \Rightarrow (d)$ вытекает из соотношения $E_{TK} \subset E$. $(d) \Rightarrow (e)$: В силу непрерывности $\mathfrak{I}$ множество $\mathfrak{I}(Q_0) = Q_0 \cdot x$ является ограниченным. $(e) \Rightarrow (a)$ в силу включения $\sigma \subset 2Q_0$. $(a) \Leftrightarrow (f)$ вытекает из теоремы 2.1. $(a) \Leftrightarrow (b)$: По теореме Банаха-Маккей условие (a) равносильно слабой ограниченности множества σx в пространстве E. Следовательно, для каждого непрерывного линейного функционала в пространстве E имеем:

$$\sup_{m,n} |f(\sigma^{mn} x)| = \sup_{m,n} \left|\sum_{k,l=0}^{m,n} \left(1 - \frac{k}{m+1}\right)\left(1 - \frac{l}{n+1}\right) f(x \cdot e^{kl})\right| = \|y\|_{m_r} < \infty.$$

$(a) \Rightarrow (c)$: Если $x \in E_{TB}$ то по теореме 2.2 имеем $q_0 \cdot x \subset E_{TB}$. Теперь по $(d) \Rightarrow (c)$ и по теореме 2.3 имеет место включение $q_0 \cdot x \subset (E_{TB})_{TK} \subset E_{TK}$. Из теоремы 2.4 непосредственно следует следующая

Теорема 2.5. Если E является FK-пространством, и $x \in E$ то следующие утверждения равносильны:

(a) $x \in E_{TB}$;

(в) $q_0 \cdot x \subset E_{TK}$;

(c) $q \cdot x \subset E$.

Теорема 2.6. Если E является FK-пространством, то следующие утверждения равносильны:

(a) $E \subset E_{TB}$;

(в) $E = q \cdot E$;

(c) $q_0 \cdot E \subset E_{TK}$;

(d) $q_0 \cdot E = E_{TK}$.

Доказательство. Ввиду теоремы 2.5 достаточно показать только включение $E_{TK} \subset q_0 \cdot E$ при условии, что E является TB-пространством. Если $x \in E_{TK}$ тогда x имеет свойство TB и $q_0 \cdot x \subset E_{TK}$. Это значить, что $x \cdot q_0 \supset E_{TK}$, $E \cdot q_0 \supset E_{TK}$

Теорема 2.7. В FK-пространстве множество последова-

тельностей $\{e^{m,n}\}$ является T – базисом тогда и только тогда, когда
$$E = q_0 \cdot E .$$

Доказательство. Из теоремы 2.6 следует, что $E = E_{TK}$ и $E = q_0 \cdot E$ равносильны, это и есть утверждение теоремы.

§ 2. Применение суммируемости по отрезкам для мультипликаторов

Для $E, F \subset \omega$ введем обозначение:
$$(E \to F) = \{X \in \omega : X \cdot E \subset F\},$$
причем $X \in (E \to F)$ называется мультипликатором. Из теорем 2.3–2.7 вытекают следующие результаты.

Теорема 3.1. Пусть E, F и $G = E \cdot F$ являются FK -пространствами. Если E или F является TK -пространством (соответственно TB -пространством), тогда и G является TK - пространством (соответственно TB -пространством).

Доказательство. Если E является TK - пространством, то
$$q_0 \cdot G = q_0 \cdot (E \cdot F) = (q_0 \cdot E) \cdot F = E \cdot F = G .$$
Доказательство случая в скобках аналогичное.

Теорема 3.2. Если E и F являются FK -пространствами и TB -пространствами, то
$$(E \to F) \subset (E_{TK} \to F_{TK}).$$

Доказательство. Действительно, если $X \in (E \to F)$ то $X \cdot E \subset F$ и по теореме 2.5 имеем
$$X \cdot E_{TK} = X \cdot q_0 \cdot E \subset q_0 \cdot F = F_{TK}$$
т.е. $X \in (E_{TK} \to F_{TK})$.

Теорема 3.3. Если E и F являются FK -пространствами, а E является TK -пространством и F является TB -пространствам то
$$(E \to F) = (E \to F_{TK}) = (E \to F_{TB}).$$

Доказательство. По предположению $E = E_{TK}$ и $X \in (E \to F_{TB})$ имеем
$$X \cdot E = X \cdot q_0 \cdot E \subset q_0 F_{TB} = F_{TK} .$$

Следовательно,

$$(E \to F_{TB}) = (E \to F_{TK}).$$

Если $X \in (E \to F_{TB})$ то

$$X \cdot E \subset F_{TB} = F \Rightarrow (E \to F_{TB}) = (E \to F).$$

Теорема 3.4. Если E является FK -пространством и $F \supset \supset q_0$ то $(F \to E) \subset E_{TB}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $F \supset q_0$ то из включения $X \cdot F \subset E$ следует включение $X \cdot q_0 \subset E$. Теперь по теореме 2.4 $X \in E_{TB}$.

§ 4. Применение суммируемости по отрезкам в теории рядов Фурье.

Пусть C^∞ – пространство функций двух переменных с периодом 2π и с непрерывными производными. Для каждого $k, \ell \in \mathbb{Z}^+$ мы определим полунорму

$$p_{k\ell}(f) = \sup_{\substack{0 \le h \le k \\ 0 \le j \le \ell}} \sup_{\substack{-\pi \le x \le \pi \\ -\pi \le y \le \pi}} |D^{hj} f(x, y)|,$$

где D^{hj} производная порядка h по x и порядка j по y от функции f. Пространство C^∞ с такими полунормами — пространство Фреше. Распределением (обобщенной функцией) называется непрерывный линейный функционал в пространстве C^∞. Множество всех распределений обозначим через D. Далее, пусть $T = [-\pi, \pi; -\pi, \pi]$, $L^1 = L^1(T) \subset D$. Коэффициенты Фурье, распределении F, будем обозначать через $\hat{F}$ и коэффициенты Фурье всех распределений с $\hat{D}$.

Пусть E – локально выпуклое хаусдорфово пространство классом полунорм β. Тогда $\hat{E} = \{\hat{F}; F \in E\}$ является локально выпуклым пространством последовательностей с полунормами $p \in \beta$. Пусть

$$\rho^{mn} = \sum_{\substack{|k| \le m \\ |\ell| \le n}} e^{k\ell} \quad \text{и} \quad \sigma^{mn} = \sum_{\substack{|k| \le m \\ |\ell| \le n}} \left(1 - \frac{|k|}{m+1}\right)\left(1 - \frac{|\ell|}{n+1}\right) e^{k\ell};$$

$$E_{TK} = \{F \in E : \hat{F} \in \hat{E}_{TK}\};$$

$$E_{TB} = \{F \in D : \hat{F} \in \hat{E}_{TB}\}.$$

Пространство E называем TK -пространством, если $E = E_{TK}$ и TB -пространством, если $E \subset E_{TB}$

Пусть

$\mathfrak{Q}_0=\{\sum_{k,l\in Z}\lambda_{kl}e^{i(kx+ly)}$, где $\lambda_{mn}=\lambda_{|m|,|n|}$; $(\lambda_{mn})_{m,n\in Z}\in q_0\}$.

Если $F*G$ – свертка двух распределении, то $\widehat{F*G}=\hat F\cdot\hat G$. В силу этого из теорем 2.6 и 2.7 следует

Теорема 4.I. Если E является FK-пространством, то имеют место

$\hat E=\hat E_{TK}\Leftrightarrow \hat E=q_0\cdot\hat E$ или $E=E_{TK}\Leftrightarrow E=\mathfrak{Q}_0*E$;

$\hat E\subset\hat E_{TB}\Leftrightarrow \hat E=q_0\cdot\hat E$ или $E\subset E_{TB}\Leftrightarrow E=\mathfrak{Q}_0*E$.

Теорема 4.2. Если E является FK-пространством и $L^1*E=E_{TK}$, то $E=E_{TK}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathfrak{Q}_0\subset L^1$ ([1]), то по теореме 3.4 получаем $(L^1\to E)\subset E_{TK}$. Если $L^1*E\subset E$ то E является TB-пространством. Так как

$$E_{TK}=\mathfrak{Q}_0*E\subset L^1*E=(\mathfrak{Q}_0*L^1)*E=\mathfrak{Q}_0*(L^1*E)\subset$$
$$\subset\mathfrak{Q}_0*E=E_{TK}$$

то

$$L^1*E=E_{TK}.$$

Следовательно, условие $L^1*E=E_{TK}$ достаточно для того чтобы $E=E_{TK}$.

Литература

I. Барон С., О мультипликаторах двойных рядов Фурье. – Уч. зап. Тартуск. ун-та, I98I, 504, II6–I25.
2. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов. – Уч.зап. Тартуск. ун-та, I959, 73, 3–49.
3. Реймерс Э., Теоремы о среднем значении и умножение суммируемых рядов. – Уч. зап. Тартуск. ун-та, I959, 73, 50–83.
4. Юримяэ Э., Методы функционального анализа в теории двойных рядов. – Уч. зап. Тартуск. ун-та, I958, 55, 3–8.
5. Butinas M., Convergent and Bounded Cesàro Sections in -Spaces. – Math. Z., 1971, 121, 191–200.
6. Butinas M., On Sectionally Dence Summability Fields. – Math. Z., 1973, 132, 141–149.
7. Butinas M., On Toeplitz Sections in Sequence Spaces. – Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1975, 78, 451–460.
8. Lorentz G.G., Zeller K., Abschnittslimitierbarkeit und

der Satz von Hardy-Bohr. - Arch. der. Math., 1964, 15, 208-213.

Поступило 20.09.88

ON CONDITIONS OF CONVERGENT AND BOUNDED CESÀRO SECTIONS FOR DOUBLE SEQUENCE SPACES AND FOR FOURIER SERIES

I. Lepasson

Summary

In his work Buntinas [5] has investigated Cesàro sectional convergence (ΓK) and Cesàro sectional boundedness (ΓB). In the present work his assertions from article [5] are generalized on double series.

In section 2 it is shown that on FK-space E is a ΓB-space $\Leftrightarrow E = q \cdot E \Leftrightarrow q_0 \cdot E = E_{\Gamma K}$ and E is a ΓK-space $\Leftrightarrow E = q_0 \cdot E$. In section 4 we consider some applications ofthe-se theorems to multipliers. In section 5 we consider some applications of these theorems to Fourier series whereby E is a Hausdorff locally convex space of distributions defined by a collection $\mathcal{P}$ of semi-norms and $\hat{E} = \{\hat{F} : F \in E\}$ will be sequence space with a locally convex Hausdorff topology defined by the semi-norms $p(\hat{F}) = p(F), p \in \mathcal{P}$. $\hat{F}$ is the set of sequences of Fourier coefficients of distributions F.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989,846, 118-129

MATRIX MAPPINGS FOR RATE-SPACES AND $\mathcal{K}$-MULTIPLIERS IN THE THEORY OF SUMMABILITY

J. Sikk

1. Introduction. Gunnar Kangro introduced the notions of spaces c^{λ} and m^{λ} as sequence spaces having sequences which converge with a given rate λ (see [5, 6]). He worked out a method of λ-summability using the techniques of summability for these spaces. We shall use a λ-summability approach to a wider class of sequence spaces which are to be called rate-spaces. We shall introduce the notions of abstract rate-spaces $X_c(\lambda)$ and $X(\lambda)$, study their matrix mappings and $\mathcal{K}$-multipliers. The latter notion is derived by generalizing that of the summability factor, it is named in honour of professor Kangro. He investigated those multipliers for spaces c^{λ} and m^{λ}. For an application, I shall use $\mathcal{K}$-multipliers to investigate Fourier coefficients and Fourier multipliers.

Rates (λ, μ, η) are real sequences with nonzero elements only. Given a matrix $A = (a_{nk})$ and a sequence $x = (x_k)$, $k = 1,2,\ldots$, we write $y = Ax$, to mean that for each n

$$y_n = (Ax)_n = \sum_k a_{nk} x_k . \tag{1}$$

Standard notions of sequence spaces c_0, c, $l^{\infty} = m$, l^p and ω (see [2]), as well as 2π-periodic functions spaces L^p with their Fourier coefficients spaces $\hat{L}^p$ (see [1]) are used throught this paper.

For a given rate $\lambda = (\lambda_n)$ and for given $x \in c$, with limit x' a sequence $\beta = (\beta_n)$ with elements

$$\beta_n = \lambda_n (x_n - x')$$

is determined. For a real (or complex) vectorspace of sequences X (basic space) the following rate-spaces

$$X_c(\lambda) = \{ x : x \in c \text{ and } \beta \in X \} , \tag{2}$$

$$X(\lambda) = \{ x : (\lambda_k x_k) \in X \} \tag{3}$$

are defined.

Examples. 1. Let λ be an increasing positive rate, then a) for basic space $X = c$ we have $X_c(\lambda) = c^{\lambda}$ (or $c_c(\lambda) = c^{\lambda}$);

b) for basic space $X = m$ $m_c(\lambda) = m^{\lambda}$;

c) for a basic space $X = c_0$ $X_c(\lambda) = X(\lambda) = c_0^{\lambda}$

(The spaces m^{λ} and c^{λ} were defined by Kangro in [5].)

2. Let $\lambda = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$, then

a) $\ell^2(\lambda) = \{x : \sum_k (x_k k^{-1})^2 < \infty\}$;

b) $c(\lambda) = \{x : \lim_k x_k k^{-1} \text{ exists}\}$;

c) $c_0(\lambda) = \{x : \lim_k x_k k^{-1} = 0\}$.

3. Let $\lambda = (1, -1, 1, -1, \ldots)$, then

a) $c_c(\lambda) = \{x : x \in c \text{ and } ((-1)^{k+1}(x_n - x')) \in c\}$;

b) $c(\lambda) = \{x : ((-1)^{k+1} x_k) \in c\}$,

c) $\ell^p(\lambda) = \{x : (\sum_k ((-1)^{k+1} x_k)^p < \infty\}$.

Let X be a linear normed space with a norm $\|\cdot\|_X$, then $X(\lambda)$ is also a linear normed space with the norme

$$\|\cdot\|_{X(\lambda)} = \|\lambda \cdot\|_X .$$

2. The mappings theorems for rate-spaces.

Let X and Y be the basic spaces. If for every $x \in X(\lambda)$ the sequence $Ax \in Y(\mu)$ then A is a matrix mapping $X(\lambda)$ into $Y(\mu)$ and we write $A \in (X(\lambda) : Y(\mu))$. The matrix mappings $(X(\lambda) : Y_c(\mu))$, $(X_c(\lambda) ; Y(\mu))$ and $(X_c(\lambda) : Y_c(\mu))$ are defined analoqously. In the present section of this paper we shall study these mappings. Their treatment will be based on relative mapping conditions of $(X : Y)$.

Lemma 1. (Kojima-Schur's theorem) A matrix $A \in (c : c)$ iff

a) $\lim_n a_{nk} = a_k$ exists,

b) $\lim_n \sum_k a_{nk} = a$ exists,

c) $\sum_k |a_{nk}| = O(1)$

(see [2], p.12).

Lemma 2. A matrix $A \in (m : c)$ (or A is coercive matrix) iff it has convergent columns and one of the following equivalent conditions holds:

a) $\sum_k |a_{nk}|$ is uniformely convergent,

b) the rows of A and $a = (a_k) \in \ell$ and $\sum_k |a_{nk} - a_k| \to 0$

(see [2], p.15).

Lemma 3. $A \in (m : m)$ also $A \in (c : m)$ and $A \in (c_0, m)$ iff $\|A\| < \infty$, where

$$\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}|$$

(see [2], p. 5).

Theorem 1. Let $A=(a_{nk})$, $A(\lambda,\mu^{-1})=(a_{nk}\lambda_k^{-1}\mu_n)$, $A(\lambda^{-1},1)=(a_{nk}\lambda_k^{-1})$ and $A(1,\mu)=(a_{nk}\mu_n)$ then

1) $A\in(X(\lambda):Y(\mu))$ iff $A(\lambda^{-1},\mu)\in(X:Y)$,
2) $A\in(X:Y(\mu))$ iff $A(1,\mu)\in(X:Y)$,
3) $A\in(X(\lambda):Y)$ iff $A(\lambda^{-1},1)\in(X:Y)$.

Proof. (a) Necessity. Let $A\in(X(\lambda):Y(\mu))$, then for every $x\in X(\lambda)$ there exists $y=Ax\in Y(\mu)$. Using the definitions of rate-spaces $X(\lambda)$ and $Y(\mu)$ to x and to Ax we have

$$y_n=\mu_n^{-1}\varkappa_n=\sum a_{nk}x_k=\sum_k a_{nk}\lambda_k^{-1}\alpha_k \tag{4}$$

for $\alpha=(\alpha_k)\in X$ and $\varkappa=(\varkappa_k)\in Y$. Thus,

$$\varkappa_n=\sum_k(a_{nk}\lambda_k^{-1}\mu_k)\alpha_k, \tag{5}$$

it follows that $A(\lambda^{-1},\mu)$.

(b) Sufficiency is easily inferred from (4) and (5). 2) and 3) will follow from 1) having $\lambda=(1)$ or $\mu=(1)$ respectively.

Corollary 1.1. A mapping $A\in(m(\lambda):c(\mu))$ iff matrix $A(\lambda^{-1},\mu)$ is coercive.

Example 1.1. By theorem 1 and example 5D in [2] for $A\in(\ell^p(\lambda):m(\mu))$ iff

$$\sup_n|\mu_n|^p\sum_k|a_{nk}\lambda_k^{-1}|^p<\infty.$$

Example 1.2. By theorem 1 and lemma 3 $(c_0(\lambda):m(\mu))=(c(\lambda):m(\mu))=(m(\lambda):m(\mu))$ and belongs to these spaces iff

$$\sup_n|\mu_n|\sum_k|a_{nk}\lambda_k^{-1}|<\infty. \tag{6}$$

Example 1.3. By theorem 1 and example 5A in [2] $(c_0(\lambda):\omega(\mu))=(c(\lambda):\omega(\mu))=(m(\lambda):\omega(\mu))$ and A belongs to these spaces iff the rows of $A(\lambda^{-1},\mu)$ belongs to ℓ.

Theorem 2. Let $A=(a_{nk})$ with $\sum_k(a_{nk}-a_k)\in Y$ and $A(\lambda^{-1},\mu)=(a_{nk}\lambda_k^{-1}\mu_n)$, then

1) $A\in(X_c(\lambda):Y(\mu))$ iff $A(\lambda^{-1},\mu)\in(X:Y)$;
2) $A\in(X_c(\lambda):Y)$ iff $A(\lambda^{-1},1)\in(X:Y)$.

This theorem is proved in the same way as theorem 1.

Example 2.1. Let A has a property $(\sum_k a_{nk})\in c(\mu)$

then
$A \in (m_c(\lambda) : m(\mu))$ (also $A \in (c_c(\lambda) : m(\mu))$ and $A \in ((c_o)_c(\lambda) : m(\mu))$ iff

$$\sup_n \sum_k |a_{nk} \lambda_k^{-1} \mu_n| < \infty . \qquad (7)$$

Example 2.2. By lemma 1 and theorem 2 $A \in (c_c(\lambda) : c)$ iff

a) A has convergent columns,

b) $\lim_n \sum_k a_{nk} \lambda_k^{-1}$ exists,

c) $\sum_k |a_{nk} \lambda_k^{-1}| = O(1)$.

Theorem 3. Let A be a matrix with convergent columns $a = (\alpha_k)$ where $\alpha_k = \lim_n a_{nk}$, $\bar{A}(\lambda^{-1}, \mu) = ((a_{nk} - a_k)\mu_n \lambda_k^{-1})$ and $A(\lambda^{-1}, 1) = (a_{nk} \lambda_k^{-1})$, then $A \in (X(\lambda) : Y_c(\mu))$ iff

$$A(\lambda^{-1}, 1) \in (X : c) \qquad (8)$$

and

$$\bar{A}(\lambda^{-1}, \mu) \in (X : Y). \qquad (9)$$

Proof. Suppose $A \in (X(\lambda) : Y_c(\mu))$, then for every $x \in X(\lambda)$ there exists a $y = Ax \in Y(\mu)$. By the definitions of rate-spaces $X(\lambda)$ and $Y_c(\mu)$ it follows that $x_k = \alpha_k \lambda_k^{-1}$ and $\beta_k = \mu_n (A_n x - Ax)$, where $\lim_n A_n x = Ax$. Thus, $(A_n x) \in c$ and (8) is satisfied. As matrix A has convergent columns we have

$$Ax = \lim_n \sum_k a_{nk} x_k = \sum_k a_k x_k . \qquad (10)$$

It follows that β has a form

$$\beta_k = \sum_k (a_{nk} - a_k)\mu_n \lambda_n^{-1} \alpha_k \qquad (11)$$

and $\bar{A}(\lambda^{-1}, \mu) \in (X : Y)$. Conversly, it follows from (8) and (9) that (10) and (11) are valid, which yields $A \in (X(\lambda) : Y_c(\mu))$.

Corollary 3.1. Let A be a matrix with convergent columns $a = (\alpha_k)$, then $A \in (X : Y_c(\mu))$ iff $\bar{A}(1, \mu) \in (X : Y)$ and $A \in (X : c)$.

Example 3.1. By theorem 3 and lemma 1 matrix $A \in (c(\lambda) : c_c(\mu))$ iff

a) it has convergent columns $a = (a_k)$;

b) $(a_{nk}) \in c_c(\mu)$ for every k=1,2,...,

c) $\lim_n \sum_k a_{nk} \lambda_k^{-1}$ exists,

d) $\sum_k |a_{nk} \lambda_k^{-1}| = O(1)$,

e) $\lim_n \sum_k (a_{nk} - a_k) \lambda_k^{-1}$ exists

f) $\sum_k |a_{nk} - a_k||\mu_n \lambda_k^{-1}| = O(1)$.

Example 3.2. By theorem 3 and lemma 3 the matrix $A \in (m(\lambda) : m_c(\mu))$ and also $A \in (c(\lambda) : m_c(\mu))$, $A \in (c_0(\lambda) : m_c(\mu))$ iff

a) it has convergent columns $a = (a_k)$,

b) $\sup_n \sum_k |a_{nk} \lambda_k^{-1}| < \infty$, (12)

c) $\sup_n \sum_k |a_{nk} - a_k||\mu_n \lambda_k^{-1}| < \infty$. (13)

Example 3.3. From theorem 3 and examples 3B and 8B in [2] it follows that if A has the convergent columns then $A \in (c(\lambda) : \ell^p_c(\mu))$ (and also $A \in (m(\lambda) : \ell^p(\mu))$) iff (12) and

$$\sup_K \sum_n |\sum_{k \in K} a_{nk} \mu_n \lambda_n^{-1}|^p < \infty$$

where K is finite set of positive integers.

Theorem 4. Let $A = (a_{nk})$ be a matrix with convergent columns, $\mu_n \sum_k (a_{nk} - a_k) \in \mathcal{Y}$, $\bar{A}(\lambda^{-1}, \mu) = ((a_{nk} - a_k)\mu_n \lambda_k^{-1})$ and $A(\lambda^{-1}, 1) = ((a_{nk} - a_k)\lambda_k^{-1})$, then

$$A \in (X_c(\lambda) : \mathcal{Y}_c(\mu))$$

iff (8) and (9) are valid.

Proof. If $A \in (X_c(\lambda) : \mathcal{Y}_c(\mu))$ then $Ax \in \mathcal{Y}_c(\mu)$ exists for every $x \in X_c(\lambda)$. By the definition of rate-space $\mathcal{Y}(\mu)$ we have $Ax \in c$ and thus the condition (8) is satisfied according to theorem 2. By the definitions of spaces $X_c(\lambda)$ and $\mathcal{Y}_c(\mu)$ it follows that for some $\alpha = (\alpha_k) \in X$ and $\beta = (\beta_k) \in \mathcal{Y}$ we have $\alpha_k = \lambda_k(x_k - x')$ and $\beta_n = \mu_n(A_n x - Ax)$ where $Ax = \lim_n A_n x = \sum_k a_k x_k$. Consequently β has a form

$$\beta_n = \mu_n \left(\sum_k (a_{nk} - a_k)\alpha_k \lambda_k^{-1} + \right.$$
$$\left. + x' \sum_k (a_{nk} - a_k) \right). \quad (14)$$

The presumption was that $\mu_n \sum_k (a_{nk} - a_k) \in \mathcal{Y}$, therefore it follows from (14) that $\bar{A}(\lambda^{-1}, \mu) = (X : \mathcal{Y})$ and (9) is satisfied.

Conversely, if the conditions (8) and (9) are satisfied and $\mu_n \sum_k (a_{nk} - a_k) \in \mathcal{Y}$ then β has a form (14) and $A \in (X_c(\lambda) : \mathcal{Y}_c(\mu))$.

Remark. The precondition $\mu_n \sum_k (a_{nk} - a_k) \in Y$ for mappings $A \in (X_c(\lambda) : Y(\mu))$ and $A \in (X_c(\lambda) : Y_c(\mu))$ is essential in theorems 2 and 4. For example in case, when $e \in X_c(\lambda)$, where $e = (1, 1, \ldots)$, this precondition becomes one of the iff-conditions.

Example 4.1. By theorem 4 and lemmas 1 and 2 a matrix $A \in (m_c(\lambda) : m_c(\mu))$ iff

a) has the convergent columns $a = (a_k)$,

b) $\lim_n \sum_k |a_{nk} - a_k| \lambda_k^{-1} = 0$,

c) $\sum_k |a_{nk} \lambda_k^{-1}| = O(1)$,

d) $\mu_n \sum_k (a_{nk} - a_k) = O(1)$,

e) $\sup_n \sum_k |a_{nk} - a_k|| \mu_n \lambda_k^{-1}| < \infty$.

Remark. A basic result of G. Kangro in the theory of λ-summability which describes the inclusion $A(m^\lambda) \subset m^\mu$ (see [5], p. 138, theorem 1) follows from example 4.1 for the case of positive and increasing rates λ and μ.

Example 4.2. Let $\mu_n \sum_k (a_{nk} - a_{nk}) = O(1)$ then by theorem 4 and example 1A in [2] $A \in (\ell_c(\lambda) : m_c(\mu))$ iff

$$\sup_{n,k} |a_{nk} \lambda_k^{-1}| < \infty,$$

$$\sup_{n,k} \{ |\mu_n \lambda_k^{-1} (a_{nk} - a_k)| \} < \infty .$$

3. K-multipliers' spaces.

The sequence x is called $AX_c(\lambda)$-summable if the sequence $y = Ax \in X_c(\lambda)$. The sequence x is called $AX(\lambda)$-summable if $y \in X(\lambda)$. The series $\sum u_k$ is called $AX_c(\lambda)$-summable if the sequence of partial sums of $\sum u_k$ is $AX_c(\lambda)$--summable. The set of $AX(\lambda)$-summable series is defined analogously.

The sequence $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ is a K-multiplier of class $(AX_c(\lambda) ; BY(\mu))$ if for any $AX_c(\lambda)$-summable series $\sum u_k$ the series $\sum \varepsilon_k u_k$ is $BY(\mu)$-summable. The classes of K--multipliers $(AX_c(\lambda), BY_c(\mu))$, $(AX(\lambda) : BY_c(\mu))$ and $AX(\lambda), BY(\mu))$ are defined analogously.

In particular, all classical spaces of summability factors can be viewed as special cases of the above-mentioned K-multiplier spaces. For example, the class of summability factors (A, B) is a K-multiplier space $(AC(1), Bm(1))$

the class of summability factors $(A_0, \mathcal{B})$ is a K-multiplier space $(Am(1), \mathcal{B}m_c(1))$. For the case of positive, monotone, unboundedly increasing rates λ and μ, the class of summability factors $(A_0, \mathcal{B}_0^{\mu})$ is a K-multiplier space $(Am_c(\lambda), \mathcal{B}m_c(\mu))$ and that of $(A_0^{\lambda}, \mathcal{B}_0^{\mu})$ is $(Am_c(\lambda), \mathcal{B}C_c(\mu))$. See [5] on the concept of summability factors.

Let $\mathcal{X}$ stand for a space X or $X(\lambda)$ or $X_c(\lambda)$ and $\mathcal{Y}$ for a space $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}(\mu)$ or $\mathcal{Y}_c(\mu)$, then we have

Theorem 5. Let $A = (a_{nk})$ be a triangle with $A^{-1} = (a'_{nk})$, $\mathcal{B} = (b_{nk})$ a triangular and $C = (c_{nk})$ a matrix with elements

$$c_{nk} = \sum_{r=k}^{n} b_{nr} \varepsilon_r a'_{rk},$$

then

$$\varepsilon \in (A\mathcal{X}, \mathcal{B}\mathcal{Y}) \qquad \text{iff}$$

$$C \in (\mathcal{X} : \mathcal{Y}).$$

Proof. We shall use Schur's method of inverse matrix. The method is frequently used to investigate summability multipliers. Let $\sum u_k \in A\mathcal{X}$ and $\sum \varepsilon_k u_k \in \mathcal{B}\mathcal{Y}$, then $x \in X$ with $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} u_k$ and $y \in \mathcal{Y}$ with $y_n = \sum_{k=1}^{n} b_{nk} \varepsilon_k u_k$. Applying to late equalities inverse matrix A^{-1} we have $u_k = \sum_{r=1}^{k} a'_{rk} x_r$ and

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} c_{nk} x_k \tag{15}$$

where $c_{nk} = \sum_{r=k}^{n} b_{nr} \varepsilon_r a'_{rk}$. Thus, $C \in (\mathcal{X} : \mathcal{Y})$.

Applying to (15) the properties of matrix A and B the converse check's easily.

Theorem 5 shows that K-multipliers are closely connected with matrix mapping theorems of rate-spaces. Therefore, it is possible to use corresponding results of section 2 on mappings to study multipliers. We shall now consider a case where $A = \mathcal{B} = J$. Then $a'_{kk} = 1$, $a'_{k+1,k} = -1$, $a'_{nk} = 0$ for $n > k+1$ and $b_{nk} = 1$ for $k \leq n$, $b_{nk} = 0$ for $k > n$. If follows that the elements of C (in theorem 1) have a form

$$c_{nk} = \begin{cases} \Delta \varepsilon_k, & k < n \\ \varepsilon_n, & k = n \end{cases} \tag{16}$$

and we have

Corollary 5.1. If $C = (c_{nk})$ has a form (16) then

$$\varepsilon \in (J\mathcal{X}, J\mathcal{Y})$$

iff

$$C \in (\mathcal{X} : \mathcal{Y}).$$

Example 5.1. Let $\mathcal{X} = m(\lambda)$ and $\mathcal{Y} = m(\mu)$ then K-multipliers' space $(Jm(\lambda), J(\eta(\mu)))$ is the class of all sequences $\varepsilon = (\varepsilon_k)_k$ for which the series $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k = O(\mu)$ for all series $\sum_{k=1}^{n} u_k = O(\lambda_n)$. By theorem 5 and example 1.1. then

$(Jm(\lambda), J(m(\mu))) = (Jc(\lambda), Jm(\mu)) = (Jc_0(\lambda), Jm(\mu))$

and $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ belongs to these K-multipliers spaces iff

$$\sup_n |u_n| \left(\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta \varepsilon_k \lambda_k^{-1}| + |\varepsilon_n \lambda_n^{-1}| \right) < \infty .$$

Example 5.2. By theorem 5 and corollary 1.1

$\varepsilon \in (Jm(\lambda), Jc)$ iff

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta \varepsilon_k \lambda_k^{-1}| + |\varepsilon_n \lambda_n^{-1}| = O(1) .$$

Example 5.3. By theorem 5 and example 1.2 for $p > 1$

$\varepsilon \in (Jl^p(\lambda), m(\mu))$ iff

$$\sup_n |u_n^p| \left(\sum_{k=1}^{n-1} |\Delta \varepsilon_k \lambda_k^{-1}| + |\varepsilon_n \lambda_n^{-1}| \right)^p < \infty$$

Example 5.4. By theorem 5 and example 8A in [2] for $p > 1$ $(Jc_0(\lambda), Jl^p(\mu)) = (JC(\lambda), Jl^p(\mu)) = (Jm(\lambda), Jl^p(\mu))$

and ε belongs to these K-multipliers spaces iff

$$\sup_K \sum_n \left| \sum_{k \in K} \Delta \varepsilon_k \lambda_k^{-1} \mu_n + \lambda_k^{-1} \mu_n \varepsilon_n \right|^p < \infty ,$$

where K is finite set of positive integers.

Example 5.5. Let $A = (R, p_n)$ be now the method of Riesz and $B = (b_{nk})$ a triangular with $\lim_n b_{nk} = 1$, $K = 1, 2, \ldots$, then

$$c_{nk} = P_k \Delta \frac{\Delta(\beta_{nk} \varepsilon_k)}{p_k} \tag{17}$$

and

$$c_k = P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k} . \tag{18}$$

Thus we have $\varepsilon \in (R\mathcal{X}, B\mathcal{Y})$ iff

$$C \in (\mathcal{X} : \mathcal{Y})$$

Example 5.6. Let $A = J$ and $B = (C, 1)$ whereas $(C, 1)$ denotes Cesaro method. Then $c_{nk} = \Delta(1 - \frac{k}{n+1}) \varepsilon_k$ and $C_k = \Delta \varepsilon_k$. By theorem 5 and example 1.1 in [2] then

$(Jm(\lambda), (C,1) m(\mu)) = (Jc(\lambda), (C,1) m(\mu)) = (Jc_0(\lambda), (C,1) m(\mu))$

and $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ belongs to these spaces iff

$$\sup_{n} \{ |\mu_n| \sum_k |\lambda_k^{-1} \Delta_k (1 - \tfrac{k}{n+1}) \varepsilon_k | \} < \infty .$$

4. The Fourier coefficients and (p,p_1)-multipliers.

In this section we shall build a Parseval formula type relation for $\hat{L}^p$ and $\hat{L}^{p_1}$ Fourier coefficients and consider the asymptotic behavior of sums $|\sum_{|k|\le N} c_k|$ for $(c_k) \in \hat{L}^p$. The results will show that the classes of series of Fourier coefficients and (p,p_1) -multipliers are "close" to the sequences of rate-spaces and K-multipliers. We shall use these results to investigate Fourier coefficients and (p,p_1)-multipliers.

Throughout this section we shall use the ordinary "language", used in the theory of Fourier series (see [1]).

Lemma 4. Let $T \in T_N$, where T_N is a class of all trigonometric polynominal of degree N and $1 \le p_1 \le p < \infty$ then

$$\|T\|_p \le 2N^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}} \|T\|_{p_1} . \tag{19}$$

Proof. See [3] , p. 249.

Lemma 5. Let $f \in L^p$ and $g \in L^{p_1}$ where $p \in (1, \infty)$ and $p_1 \in (1, \frac{p}{p-1})$ then

$$|\sum_{|n|\le N} \hat{f}(n)\hat{g}(-n)| = O(N^{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p} - 1}) . \tag{20}$$

Proof. For a sequence $(\hat{f}(n)) \in \hat{L}^p$ and for a polynomial $S_N g = \sum_{|n|\le N} \hat{g}(n) e^{-inx}$ we can use the Parseval formula and the Hölder inequality. Therefore

$$|\sum_{|n|\le N} \hat{f}(n)\hat{g}(-n)| = \tfrac{1}{2\pi} |\int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n g(x)\, dx| \le \|f\|_p \|S_n g\|_q ,$$

where $p^{-1} + q^{-1} = 1$ By lemma 4

$$\|S_N g\|_q \le 2N^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q}} \|S_N g\|_{p_1} ,$$

it also follows by lemma 4 that for $\|S_k g\|_{p_1} = O(1)$, and we have (20).

Corollary. If $f, g \in L^p$ for $p \in (1, 2]$, then

$$|\sum_{|n|\le N} \hat{f}(n)\hat{g}(-n)| = O(N^{\frac{2}{p} - 1}) . \tag{21}$$

Lemma 6. Let $(\hat{f}(n)) \in \hat{L}^p$ where $p \in (1,\infty)$, then

$$|\sum_{|n|\le N} \hat{f}(n)| = O(N^{\frac{1}{p}}). \tag{22}$$

Proof. We shall use the Hölder inequality. For the sequence $(\hat{f}(n)) \in \hat{L}^p$

$$|\sum_{|n|\le N} \hat{f}(n)| = \frac{1}{2\pi} |\sum_{|n|\le N} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{|n|\le N} e^{-inx} dx| \le \|f\|_p \|\sum_{|n|\le N} e^{-inx}\|_q$$

where $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Now (22) follows from the fact, that

$$\|\sum_{|n|\le N} e^{-inx}\|_q = O(N^{\frac{1}{p}}).$$

We shall now renumber the Fourier coefficients in a following way: $\hat{f}(0) = c_0, \hat{f}(1) = c_1, \hat{f}(-1) = c_2, \hat{f}(2) = c_3, \hat{f}(-2) = c_4 \dots$ and $\hat{g}(0) = c_0^*, \hat{g}(1) = c_1^*, \hat{g}(1) = c_2^*, \hat{g}(-2) = c_3^*, \hat{g}_2 = c_4^* \dots$ etc.

Within rate-spaces' terminology the Parseval formula, its analogues and lemma 4 to 6 have the following form.

Theorem 6. (Parseval formula analogue). Let $(c_k) \in \hat{L}^p$ and $(c_k^*) \in \hat{L}^q$ for $p^{-1} + q^{-1} = 1$ where $p \in (1,\infty)$ then the series $\sum c_k c_k^*$ is $Jc(1)$ -summable.

A result, close to Parseval formula (see [3], p. 257) can be re-written:

Theorem 7. Let $p \in (1,\infty)$ then the sequence $(c_k) \in \hat{L}^p$ iff the series $\sum c_k c_k^*$ is $Jc(1)$-summable for every $(c_k^*) \in L^q$.

Theorem 8. Let $f \in L^p, g \in L^{p_1}$ where $p \in (1,\infty)$, $p_1 \in (1, \frac{p}{p-1})$ and $\lambda = (n^{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p} - 1})$, then the series $\sum_k c_k c_k^*$ is $Jm(\lambda)$ -summable.

By lemma 6 and Riemann-Lebesque lemma (see [1] p. 36) we have

Theorem 9. Let $p \in (1,\infty)$ and $\lambda = (n^{\frac{1}{p}})$ then the series $|\sum c_k|$ is $Jm_{c_0}(\lambda)$ -summable.

Definition. The sequence (ε_k) is a (p,p_1) -multiplier if for every $(c_k) \in \hat{L}^p$ the $(\varepsilon_k c_k) \in \hat{L}^{p_1}$.

We can now supply a detailed characterization of (p,p_1)--multipliers and $\hat{L}^p$ Fourier coefficients by means of K-multipliers.

Theorem 10. Let $p \in (1,\infty)$ then

a) if ε is a K-multiplier of class $(Jm_{c_0}(\lambda), Jc)$ where $\lambda = (n^{\frac{1}{p}})$ then $\varepsilon \in \hat{L}^q$ for $p^{-1} + q^{-1} = 1$;

b) if ε is a K-multiplier of class $(Jm(\mu), Jc)$ where

$\mu = (n^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p}-1})$ for $p_1 \in (1, \frac{p}{p-1})$ then ε is (p_1, q)-multiplier (and (p, q_1) -multiplier).

Proof. a) By theorem 9 it is true that $\hat{L}^p \subset Jm_{C_0}(\lambda)$, thus it follows from theorem 7 that K-multipliers class

$$(Jm_{C_0}(\lambda), Jc) \subset L^q.$$

b) By theorem 8 the series $\sum_k c_k c_k^*$ is $Jm(\mu)$ -summable for every $f \in L^p$ and $g \in L^{p_1}$. Let $\varepsilon \in (Jm(\lambda), Jc)$, then $\sum \varepsilon_k c_k c_k^*$ is Jc -summable for every $f \in L^p$ and $g \in L^{p_1}$ therefore by theorem 7 the sequence ε is (p_1, q)--multiplier and a (p, q_1) -multiplier.

Corollary 10.1. Let

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^{-\frac{1}{p}} |\Delta \varepsilon_k| + |\varepsilon_n| n^{-\frac{1}{p}} < \infty$$

then $\varepsilon \in \hat{L}^p$.

The corollary follows from theorem 10 a) and example 5.2.

Corollary 10.2. Let

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}+1} |\Delta \varepsilon_k| + |\varepsilon_n| n^{1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} < \infty$$

then $\varepsilon \in (p_1, q)$ and $\varepsilon \in (p, q_1)$.

The corollary follows from theorem 10 b) and example 5.1.

References.

1. Edwards R.E. Fourier series. Vol. 1 and 2 // New York, etc, 1967.
2. Wilansky A. Summability trough functional analysis // Amsterdam etc.: North-Holland, 1984.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды // М.: Мир.1965. Т.I.
4. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов //М., 1958.
5. Кангро Г. Множители суммируемости для рядов λ-ограниченных методами Риса и Чезаро // Уч. зап. Тартуск. ун--та, 1971, 277, 130-154.
6. Кангро Г. О множителях суммируемости типа Бора-Харди для заданной скорости // Изв. АН ЭстССР Физ., Матем., 1969, 18, № 2, 137-146.

Received 25.11.88

Матричные методы для рейт-пространств
и K-мультипликаторы в теории суммируемости

Я. Сикк

Резюме.

Исходя из пространств c^{λ} и m^{λ}, определенные Кангро [5], в статье рассматриваются наиболее широкие классы последовательностей, которые мы называем рейт-пространствами.

Пусть $\lambda = (\lambda_n)$, $\lambda_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, а X -линейное пространство последовательностей. Пространство всех тех последовательностей $x \in c$, для которых $\beta \in X$ (при $\beta_n = \lambda_n(x_n - x)$) называется X_c^{λ}-рейт-пространством и обозначается через $X_c(\lambda)$.

Подпространствами пространства $X_c(\lambda)$ являются пространства $X_{c_c}(\lambda)$, $X_{\ell^p}(\lambda)$ и другие.

Пространство всех тех последовательностей x, для которых $(\lambda_n x_n) \in X$ называется X^{λ}-рейт-пространством и обозначается через $X(\lambda)$.

Для рейт-пространств мы определяем следующий матричный оператор: пусть $\mu = (\mu_n)$ где $\mu_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ и пусть A – некоторый метод суммирования последовательностей, переводящий x в последовательность Ax. Если при каждом $x \in X_c(\lambda)$ оказывается, что $Ax \in Y_c(\mu)$, то метод A определяет оператор $A \in (X_c(\lambda) : Y_c(\mu))$. Аналогичным образом определены нами матричные операторы классов $(X(\lambda) : Y(\mu))$, $(X_c(\lambda) : Y(\mu))$ и $(X(\lambda) : Y_c(\mu))$ (см. теоремы 1–4).

В статье автором определено понятие K-мультипликатора.

Определение. Пусть $m(\lambda)$ и $m(\mu)$ рейт-пространства m_c^{λ} и m_c^{μ}, $A = (a_{nk})$ и $B = (b_{nk})$ -методы суммирования. Последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ является K-мультипликатором класса $(A\, m_c(\lambda), B\, m_c(\mu))$, если при каждом $(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} u_k) \in m_c(\lambda)$ вытекает, что последовательность частных сумм $(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k b_{nk} u_k) \in m_c(\mu)$.

Найдены конкретные K-мультипликаторы для конкретных классов методов суммирования (теорема 5 и ее следствия).

При помощи K-мультипликаторов в статье изучены коэффициенты Фурье и мультипликаторы рядов Фурье.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та,1989,846,130-136

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНЫЕ МЕТОДЫ СИЛЬНОГО СУММИРОВАНИЯ И МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ

В. Соомер, К. Нийнепуу

Тартуский государственный университет

§ I. Введение

Пусть $\alpha=(A_i)$ - последовательность матриц[I] $A_i=(a_{nik})$.

Определение I. Последовательность $x=(x_k)$ называется α-суммируемой, если существует конечный предел

$$\lim_n \sum_k a_{nik} x_k = \alpha(x)$$

равномерно по i.

Через c_α обозначим множество всех α-суммируемых последовательностей (поле суммируемости последовательностного метода α). Через c, f и m обозначим соответственно пространства всех сходящихся, почти сходящихся и ограниченных последовательностей. Отметим, что $f=c_\alpha \cap m$, если

$$a_{nik} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{для} \quad i \leqslant k \leqslant i+n, \\ 0 & \text{для остальных } k. \end{cases}$$

Пусть теперь X и Y - некоторые пространства последовательностей.

Определение 2. Последовательность $\varepsilon=(\varepsilon_k)$ называется мультипликатором типа (X,Y), если $\varepsilon=(\varepsilon_k x_k)\in Y$ при всех $x=(x_k)\in X$.

В настоящей статье изучаются мультипликаторы типа (c_α^*, c_β^*), где α и β - последовательностные методы суммирования и $c_\alpha^* = c_\alpha \cap m$, $c_\beta^* = c_\beta \cap m$.

Приведем некоторые определения и теоремы, которые применяются в дальнейшем.

Определение 3. Последовательность $x=(x_k)$ называется сильно α-суммируемой к числу ℓ, если

[I] Если пределы изменения индексов не указаны, то они принимают значения от 0 до ∞.

$$\lim_n \sum_k |a_{nik}||x_k - \ell| = 0$$

равномерно по i.

Множество всех сильно α-суммируемых последовательностей обозначим через $[c_\alpha]$

Теорема I.I. [7] Включение $c \subset c_\alpha$ имеет место тогда и только тогда, когда

1^0 $\exists \lim_n a_{nik} = a_k$ равномерно по i,

2^0 $\exists \lim_n \sum_k a_{nik} = a$ равномерно по i,

3^0 $\exists\, r > 0,\ \sup_{\substack{n \geq r \\ i \geq 0}} \sum_k |a_{nik}| < \infty$

Последовательностный метод α называется регулярным, если $c \subset c_\alpha$ и $\alpha(x) = \lim x$ для всех $x \in c$. Для регулярных методов α имеет место $a_k = 0$, $a = 1$.

Пусть $c \subset c_\alpha$. Число $\rho(\alpha) = a - \sum_k a_k$ называется характеристикой метода α.

Определение 4. Метод α называется конулевым, если $\rho(\alpha) = 0$ и корегулярным, если $\rho(\alpha) \neq 0$.

Определение 5. Последовательностный корегулярный матричный метод α называется $\mathscr{O}$-совершенным, если при любом последовательностном методе β для которого $c_\alpha^* \subset c_\beta^*$ и $\alpha(x) = \beta(x)$ для всех $x \in c$, имеет место $\alpha(x) = \beta(x)$ для всех $x \in c_\alpha^*$.

Пусть $\alpha = (A)$, $A = (a_{nk})$, тогда $c_\alpha = c_A$ (поле суммируемости матричного метода A). Понятие $\mathscr{O}$-совершенности матричного метода A было введено в статьях [4] и [5]. Известно, что каждый корегулярный матричный метод A – $\mathscr{O}$-совершенен (теорема Мазура-Орлича).

В статье [I] рассматривается класс последовательностных методов α, для которых выполнены следующие условия:

(a) матрицы A_i конечнострочные,

(b) $\sup_i |a_{nik}| < \infty$.

В статье [I] доказано, что конулевость таких методов эквивалентна слабой сходимости к нулю последовательности

$e - \sum_{k=0}^{r} e_k$ в FK-пространстве c_α, где $e = (1, 1, \dots)$, $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) = (\delta_{ik})$.

Известно, что конулевость любого матричного метода описывается также. В той же статье и доказано, что каждый корегулярный последовательностный метод α, который удовлетворяет условиям (a) и (b), является $\mathscr{O}$-совершенным.

§ 2. Мультипликаторы типа (c_α^*, c_β^*) для корегулярных последовательностных методов

Обозначим множество всех ограниченных последовательностей, которые являются мультипликаторами типа (c_α^*, c_β^*), через $M(c_\alpha^*, c_\beta^*)$.

Оказывается, что при некоторых ограничениях на метод α отображение $\varepsilon x \to \alpha(\varepsilon x)$ является мультипликативным при всех $\varepsilon = (\varepsilon_k) \in M(c_\alpha^*, c_\beta^*)$ и $x = (x_k) \in c_\alpha^*$.

Теорема 2.I. Пусть α – регулярный $\mathcal{O}$-совершенный последовательностный метод и β – регулярный последовательностный метод, тогда

$$\beta(\varepsilon x) = \beta(\varepsilon)\cdot\alpha(x)$$

при всех $\varepsilon \in M(c_\alpha^*, c_\beta^*)$ и $x \in c_\alpha^*$.

Доказательство. Отметим, что из регулярности метода α следует, что $e \in c_\alpha^*$, значит $\varepsilon \in c_\beta^*$ при всех $\varepsilon \in M(c_\alpha^*, c_\beta^*)$, т.е. $M(c_\alpha^*, c_\beta^*) \subset c_\beta^*$.

Пусть $\alpha = (A_i)$, $A_i = (a_{nik})$ и $\beta = (B_i)$, $B_i = (b_{nik})$.

I° Если $\beta(\varepsilon) \neq 0$, то определим последовательностный метод $\gamma = (C_i)$, $C_i = (c_{nik})$ следующим образом

$$c_{nik} = \frac{1}{\beta(\varepsilon)}\, b_{nik}\,\varepsilon_k .$$

Нетрудно проверить, что ввиду регулярности метода β метод γ будет также регулярным. Так как $\varepsilon = (\varepsilon_k) \in M(c_\alpha^*, c_\beta^*)$, то при всех $x = (x_k) \in c_\alpha^*$ существует предел

$$\lim_n \frac{1}{\beta(\varepsilon)} \sum_k b_{nik}\,\varepsilon_k\, x_k ,$$

значит, $c_\alpha^* \subset c_\gamma^*$. Ввиду регулярности методов α и γ эти методы совместны на множестве c и из-за $\mathcal{O}$-совершенности метода α имеет место

$$\alpha(x) = \gamma(x) \text{ при всех } x \in c_\alpha^* .$$

Тогда имеем

$$\alpha(x) = \gamma(x) = \frac{1}{\beta(\varepsilon)} \lim_n \sum_k b_{nik}\,\varepsilon_k x_k = \frac{1}{\beta(\varepsilon)}\cdot\beta(\varepsilon x)$$

т.е. действительно при $\beta(\varepsilon) \neq 0$

$$\beta(\varepsilon x) = \beta(\varepsilon)\cdot\alpha(x).$$

2° Если $\beta(\varepsilon) = 0$, то выберем $c_{nik} = b_{nik}\varepsilon_k + a_{nik}$, тогда метод γ регулярен, $c_\alpha^* \subset c_\gamma^*$ и

$$\gamma(x) = \beta(\varepsilon x) + \alpha(x). \tag{2.I}$$

Тогда ввиду $\mathcal{O}$-совершенности метода α имеет место $\gamma(x) = \alpha(x)$ при всех $x \in c_\alpha^*$ и из равенства (2.I) вытекает, что $\beta(\varepsilon x) = 0$, значит

$$\beta(\varepsilon x) = \beta(\varepsilon)\cdot\alpha(x) = 0.$$

Теорема 2.I. при $c_\alpha = c_\beta = c_A$ (где A – некоторый регулярный метод) была доказана в статье [6], для последовательностных методов при $\alpha = \beta$ в статье [2].

Мультипликаторов типа $(c_\alpha^*,\ c_\beta^*)$ охарактеризует следующая

Теорема 2.2. [2] Если α – регулярный $\mathcal{O}$-совершенный последовательностный метод и $a_{nik} \geq 0$, то

$$M(c_\alpha^*,\ c_\alpha^*) = [c_\alpha] \cap m.$$

Рассмотрим теперь, как связаны условие $\varepsilon \in M(c_\alpha^*, c_\beta^*)$ при $\alpha \neq \beta$ и сильная суммируемость последовательности ε. В связи с этим можем делать следующие примечания.

I. Пусть α и β регулярные последовательностные методы, где $a_{nik} \geq 0$, $b_{nik} \geq 0$, метод β – $\mathcal{O}$-совершенный и $c_\beta^* \subset c_\alpha^*$. Так как из соотношения $c_\beta^* \subset c_\alpha^*$ следует, что $M(c_\alpha^*, c_\beta^*) \subset M(c_\beta^*,\ c_\beta^*)$, то из теоремы 2.2 вытекает, что условие $\varepsilon \in [c_\beta]$ является необходимым, чтобы $\varepsilon = (\varepsilon_k) \in M(c_\alpha^*,\ c_\beta^*)$.

Но условие $\varepsilon \in [c_\beta]$ не является достаточным для мультипликаторов типа $(c_\alpha^*,\ c_\beta^*)$, если $c_\beta^* \subsetneq c_\alpha^*$. Действительно, тогда существует такая последовательность $x = (x_k) \in c_\alpha^*$, что $x \notin c_\beta^*$ и мы видим, что $e \notin M(c_\alpha^*, c_\beta^*)$, но $e \in [c_\beta] \cap m$.

2. Если $c_\alpha^* \subset c_\beta^*$, то условие $\varepsilon \in [c_\beta] \cap m$ является достаточным для того, чтобы $\varepsilon = (\varepsilon_k) \in M(c_\alpha^*,\ c_\beta^*)$. Действительно, пусть

$$\lim_n \sum_k |b_{nik}||\varepsilon_k - l| = 0 \qquad (2.2.)$$

равномерно по i, тогда при всех $x \in c_\alpha^*$ имеем

$$\sum_k b_{nik}\varepsilon_k x_k = \sum_k b_{nik} x_k(\varepsilon_k - l) + l\sum_k b_{nik} x_k.$$

Так как $|\sum_k b_{nik} x_k(\varepsilon_k - l)| \leq \sup_k |x_k| \sum_k |b_{nik}||x_k - l|$, то первое слагаемое стремится к нулю ввиду условия (2.2), а второе слагаемое имеет конечный предел ввиду того, что $c_\alpha^* \subset c_\beta^*$.

Значит, существует предел $\lim_n \sum_k b_{nik}\varepsilon_k x_k$ (равномерно по i).

Условие $\varepsilon \in [c_\beta]$ не является необходимым для мультипликаторов типа $(c_\alpha^*,\ c_\beta^*)$ при $c_\alpha^* \subsetneq c_\beta^*$. Действительно, если $c_\alpha = c$ и $c_\beta = f$, то $c \subsetneq f$ и $M(c, f) = f$, но известно, что $[c_\beta] = [f] \subsetneq f$ (Здесь $[f]$ – множество всех сильно почти сходящихся последовательностей[2]).

В итоге можем сформулировать следующую теорему

Теорема 2.3. Пусть α и β – $\mathcal{O}$-совершенные регулярные последовательностные методы и $a_{nik} \geq 0$, $b_{nik} \geq 0$. Тогда

I° при $c_\beta^* \subsetneq c_\alpha^*$ имеет место $M(c_\alpha^*, c_\beta^*) \subsetneq [c_\beta] \cap m$.

2° при $c_\alpha^* \subsetneq c_\beta^*$ имеет место $[c_\beta] \cap m \subsetneq M(c_\alpha^*, c_\beta^*)$.

3° при $\alpha = \beta$ имеет место $M(c_\alpha^*, c_\beta^*) = [c_\alpha] \cap m$.

Замечание I. Если α и β – корегулярные $\mathcal{O}$-совершенные последовательностные методы, и $a_{nik} - a_k \geq 0$, $b_{nik} - b_k \geq 0$, то условие $\varepsilon \in [c_\beta]$ будет заменено условием

$$\lim_n \sum_k (b_{nik} - b_k) |\varepsilon_k - \ell| = 0$$

равномерно по i (см. [3], теорема 2.3).

Замечание 2. Мы видим, что полученные результаты о мультипликаторах имеют мест при условия $\mathcal{O}$-совершенности рассматриваемых методов. Поэтому в первом параграфе указан класс $\mathcal{O}$-совершенных α-методов.

Замечание 3. Отметим, что условие $\varepsilon \in [c_\beta] \cap m$ для мультипликаторов типа (c_α^*, c_β^*) при $c_\alpha^* \subset c_\beta^*$ будет достаточным без ограничений $a_{nik} \geq 0$, $b_{nik} > 0$ и без требования $\mathcal{O}$-совершенности методов α или β.

§ 3. Мультипликаторы типа (c_α^*, c_β^*) для конулевых методов

В этом параграфе рассматриваются конулевые последовательностные методы суммирования, удовлетворяющие условиям (a) и (b). Если $\alpha = (A_i)$ – конулевой последовательностный метод суммирования, то $\varrho(\alpha) = a - \sum_k a_k = 0$, но тогда и все матричные методы A_i – конулевые.

Определение. Конулевой матричный метод A называется $\mathcal{O}$-совершенным, если для любого метода B, для которого $c_A \subset c_B$, условие $A(x) = B(x)$ для всех $x \in c$ влечет за собой $A(x) = B(x)$ для всех $x \in c_A^*$, где $c_A^* = c_A \cap m$.

Теорема 3.I. [4] Конулевой матричный метод A является $\mathcal{O}$-совершенным тогда и только тогда, когда для каждой последовательности $x \in c_A^*$ имеет место

---

[2] $[f] = \{x = (x_k) \mid \exists \ell, \lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{k=i}^{i+n} |x_k - \ell| = 0$ равномерно по $i.\}$

$$A(x)=\lim_n \sum_k a_{nk} x_k = \sum_k a_k x_k . \qquad (3.1.)$$

Достаточные условия для мультипликаторов типа (c_α^*, c_β^*) где α – конулевой последовательностный метод, дает следующая теорема.

Теорема 3.2. Пусть $\alpha=(A_i)$ и $\beta=(B_i)$ – последовательностные методы, где $c_\alpha^* \subset c_\beta^*$, метод β является конулевым и все матричные методы B_i – $\mathcal{O}$-совершенные. Тогда для того, чтобы $\varepsilon \in M(c_\alpha^*, c_\beta^*)$, достаточно выполнение условия

$$\lim_n \sum_k |b_{nik} - b_k||\varepsilon_k - \ell| = 0 \qquad (3.2.)$$

равномерно по i.

Доказательство. Для всех $x \in c_\alpha^*$ имеем

$$|\sum_k b_{nik}\varepsilon_k x_k - \sum_k b_k \varepsilon_k x_k| =$$
$$= |\sum_k (b_{nik}-b_k)x_k(\varepsilon_k-\ell)+\ell(\sum_k b_{nik}x_k - \sum_k b_k x_k)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_k |x_k| \sum_k |b_{nik}-b_k||\varepsilon_k-\ell| + |\ell||\sum_k b_{nik}x_k - \sum_k b_k x_k|.$$

Первое слагаемое стремится к нулю (при $n\to\infty$) ввиду условия (3.2), а второе ввиду того, что $c_\alpha^* \subset c_\beta^*$ и что для $\mathcal{O}$-совершенных методов B_i выполнено условие (3.I). Значит $\varepsilon \in M(c_\alpha^*, c_\beta^*)$ и $\beta(\varepsilon x) = \sum_k b_k \varepsilon_k x_k$ при всех $x \in c_\alpha^*$ и $\varepsilon \in M(c_\alpha^*, c_\beta^*)$.

Замечание 4. Условие (3.2) выполнено для всех $\varepsilon \in m$, если $m \subset c_\beta$. Но в общем условие (3.I) не является необходимым для мультипликаторов типа (c_α^*, c_β^*).

Пример. Пусть $\alpha=\beta$, $\alpha=(A)$ и $A=(a_{nk})$, где

$$a_{nk}=\begin{cases} 1 \text{ для } k=n, \\ -1 \text{ для } k=n-1, \\ 0 \text{ для остальных } k. \end{cases}$$

Тогда метод A является $\mathcal{O}$-совершенным конулевым методом, $a_k=0$ и ввиду теоремы 3.I

$$\lim_n \sum_k a_{nk}x_k = \lim_n (x_n - x_{n-1}) = 0.$$

при всех $x=(x_k)\in c_A^*$. Но так как

$$\sum_k a_{nk}\varepsilon_k x_k = \varepsilon_n x_n - \varepsilon_{n-1}x_{n-1} = x_n(\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) +$$
$$+ \varepsilon_{n-1}(x_n - x_{n-1}),$$

то мы видим, что в данном случае $M(c_\alpha^*, c_\beta^*) = M(c_A^*, c_A^*) = c_A^*$. Нетрудно убедится, что условие (3.2) в данном случае эквивалентно условию $\varepsilon \in c$. Так как A – конулевый метод, то $c \subsetneq c_A^*$, значит, условие (3.2) не является необходимым для того, чтобы $\mathcal{E} \in M(c_A^*, c_A^*)$.

Литература

1. Лейгер Т., Плаксо К. О конулевых и корегулярных операторных матрицах суммирования // Уч. зап. Тарт. ун-та (см. настоящий сборник)
2. Соомер В. Сильная суммируемость, заданная последовательностью матриц // Деп. в ВИНИТИ 10.01.1979, № 96-79.
3. Соомер В. Последовательностные методы сильного суммирования // Уч. зап. Тарт. ун-та, 1984. № 661. С. 42-48.
4. Юримяэ Э. Топологические свойства конулевых методов суммирования // Уч. зап. Тарт. ун-та, 1964. № 177. С.43-61.
5. Юримяэ Э. Топологические свойства конулевых методов суммирования II // Уч. зап. Тарт. ун-та, 1970. № 253. С. 145-147.
6. Hill, J.D., Sledd, W.T. Approximation in bounded summability fields // Can. J. Math., 1968. Vol. 20. P. 410-415.
7. Stieglitz, M., Fastkonvergenz und Umfassendere durch Matrizenfolgen erklärte konvergenzbegriffe // Stuttgart 1971.

Поступило 11.10.88

SUMMABILITY, DEFINED BY A SEQUENCE OF MATRICES AND THE MULTIPLIERS

V. Soomer, K. Niinepuu

Summary

Let $\alpha = (A_i)$ be a sequence of matrices $A_i = (a_{nik})$. A sequence $x = (x_k)$ is called α-summable if there exists

$$\lim_n \sum_k a_{nik} x_k = \alpha(x)$$

uniformly by i. The set of all bounded α-summable sequences is denoted by c_α^*.

In this note the multipliers from c_α^* to c_β^* are investigated.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989, 846, 137-149

О СРАВНЕНИИ ПРОЦЕССОВ СУММИРОВАНИЯ С ПРОЦЕССОМ РИССА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Д.А. Коган
Свердловский педагогический институт

Пусть X - произвольное банахово пространство (действительное или комплексное), $[X]$ - банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, отображающих X в себя, и $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ - тотальная последовательность взаимно ортогональных проекций на X ([6] , с.128). В этом случае для каждого $f \in X$ можем записать ряд Фурье

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} P_k f .$$

<u>Определение 1 ([6] , с.128)</u>. Пусть S - множество всех скалярных последовательностей $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$. Последовательность $\alpha \in S$ называется мультипликаторной для X (соответствующей $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$), если для каждого $f \in X$ существует элемент $f_\alpha \in X$ такой, что $\alpha_k P_k f = P_k f_\alpha$ для каждого $k \in P$ (через P обозначено множество всех неотрицательных целых чисел); отсюда

$$f_\alpha \sim \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P_k f .$$

Обозначим через $M = M(X, \{P_k\})$ множество всех мультипликаторных последовательностей. Вводим естественным образом операции сложения (как сложение векторов), умножения (покоординатно) и норму:

$$\|\alpha\| = \sup\{\|f_\alpha\| ;\ f \in X,\ \|f\| \le 1\}.$$

В этом случае M - коммутативная банахова алгебра ([6], с.128), причем M содержит единичный элемент.

<u>Определение 2 ([6], с.128-129)</u>. Оператор $T \in [X]$ называется мультипликаторным оператором, если существует последовательность $\tau = \{\tau_k\} \in M$ такая, что $P_k T f = \tau_k P_k f$ для любых $f \in X$, $k \in P$. Отсюда можем записать, что для любого $f \in X$

$$Tf \sim \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k P_k f .$$

18

Итак, каждый мультипликаторный оператор ассоциирован с определенной мультипликаторной последовательностью и обратно. По определению $\|T\|_{[X]} = \|\tau\|_M$. Алгебра M может быть отождествлена с подпространством мультипликаторных операторов в $[X]$.

<u>Определение 3 ([6], с.127)</u>. Пусть $\{T(\rho)\}$ и $\{G(\rho)\}$ (где $\rho>0$) – два семейства мультипликаторных операторов из $[X]$. Если существует постоянная $A>0$ такая, что для любых $f\in X$ и $\rho>0$ выполняется неравенство

$$\| T(\rho)f - f\|_X \le A\| G(\rho)f - f\|_X ,$$

то говорят, что процесс $\{T(\rho)\}$ лучше чем $\{G(\rho)\}$.

Два процесса $\{T(\rho)\}$ и $\{G(\rho)\}$, каждый из которых лучше другого, называют эквивалентными.

Пусть $Q\in[X]$. Введем обозначение $N(Q)=\{f\in X \mid Qf=0\}$ Через I обозначим тождественное отображение X в себя.

<u>Теорема А ([6], с.129-130)</u>. Пусть 1) $\{T(\rho)\}, \{G(\rho)\}$ – два семейства мультипликаторных операторов, ассоциированных при каждом $\rho>0$ с мультипликаторными последовательностями $\{\tau_k(\rho)\}$, $\{\gamma_k(\rho)\}$ соответственно;

2) $N(G(\rho)-I)\subseteq N(T(\rho)-I)$;

3)

$$\delta_k(\rho)=\begin{cases}\dfrac{\tau_k(\rho)-1}{\gamma_k(\rho)-1} & \text{при } k\notin P_G(\rho),\\ 1 & \text{при } k\in P_G(\rho),\end{cases}$$

где $$P_G(\rho)=\{k\in P \mid \gamma_k(\rho)=1\};$$

предполагается, что $\delta(\rho)=\{\delta_k(\rho)\}$ является при каждом $\rho>0$ мультипликаторной последовательностью. Тогда для любых $\rho>0$, $f\in X$

$$\|T(\rho)f-f\| \le \|\delta(\rho)\|_M \|G(\rho)f-f\| .$$

Если, кроме того, семейство $\{\delta(\rho)\}$ равномерно ограничено, то есть существует постоянная $A>0$, что при любом $\rho>0$ $\|\delta(\rho)\|\le A$, то $\{T(\rho)\}$ лучше чем $\{G(\rho)\}$.

<u>Определение 4 ([6], [7])</u>. Функция $f(x)$ называется локально абсолютно непрерывной на $(0,+\infty)$, если $f(x)$ абсолютно непрерывна на любом сегменте $[a,b]\subset(0,+\infty)$.

Аналогично вводится понятие функции локально ограниченной вариации на $(0,+\infty)$.

Введем обозначения:

$AC_{loc}(0,+\infty)$ – множество всех функций локально абсолютно непрерывных на $(0,+\infty)$;

$BV_{loc}(0,+\infty)$ – множество всех функций локально ограниченной вариации на $(0,+\infty)$.

Определение 5 ([6],[7]). Функция $f(x)$ называется квазивыпуклой на $(0,+\infty)$, если $f(x)\in AC_{loc}(0,+\infty)$ с производной $f'\in BV_{loc}(0,+\infty)$ такой, что

$$\int_0^\infty x|df'(x)|<\infty .$$

Далее вводим следующие обозначения:

$BQC[0,+\infty)$ – множество всех ограниченных квазивыпуклых функций на $(0,+\infty)$, являющихся непрерывными в точке $x=0$;

$B^*QC[0,+\infty)$ – множество всех функций $f(x)$ из $BQC[0,+\infty)$, для каждой из которых производная $f'(x)$ является непрерывной на $(0,+\infty)$ (за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода), а также абсолютно непрерывной на каждом сегменте $[a,b]\subset(0,+\infty)$, не содержащем точек разрыва;

$C_0(-\infty,+\infty)$ – множество всех функций $f(x)$, непрерывных на $(-\infty,\infty)$, для каждой из которых $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$

Теорема Б ([6], с.134). Пусть I) X – банахово пространство и $\{P_k\}$ – тотальная последовательность взаимно ортогональных проекций на X и чезаровские средние порядка I, то есть

$$\sigma_n f=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)P_k f$$

при любых $n\in P$ и $f\in X$ удовлетворяют условию

$$\|\sigma_n f\|\leqslant C\|f\|, \tag{I}$$

где C – постоянная, не зависящая от n и f ;
2) $\{\tau_k(\rho)\}$ – семейство последовательностей, для которого существует функция $\varphi(x)\in BQC[0,+\infty)$ такая, что

$\tau_k(\rho)=\varphi(\frac{k}{\rho})$ для любых $k\in P$, $\rho>0$.
Тогда $\{\tau_k(\rho)\}$ является семейством равномерно ограниченных мультипликаторных последовательностей.

Замечание. В работе [6] теорема Б формулируется как следствие 3.6.

Теорема В ([7], с.251). Если четная функция

$\varphi \in BQC[0,+\infty)$ и $\varphi \in C_0(-\infty,+\infty)$, то φ представима как преобразование Фурье некоторой четной функции $g \in \mathcal{L}^1$.

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-ixt}dt. \qquad (2)$$

Причем, если φ – выпуклая функция, то g – положительная. Перепишем формулу (2) следующим образом:

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(t)e^{-ixt}dt,$$

где
$$\mathcal{K}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g(t).$$

<u>Замечание</u>. Если функция φ будет удовлетворять условиям теоремы В и определять (как в теореме Б) семейство последовательностей $\{\tau_k(p)\}$, то $\mathcal{K}(t)$ будем называть ядром семейства $\{\tau_k(p)\}$ или ядром соответствующего семейства операторов.

Пусть X – банахово пространство и $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ – тотальная последовательность взаимно ортогональных проекций на X, $r>0$, $f\in X$,

$$g_r(x)=\begin{cases}1-|x|^r & \text{при } |x|\le 1\\ 0 & \text{при } |x|\ge 1\end{cases},\quad R_r(n)f=\sum_{k=0}^{n} g_r\left(\frac{k}{n+1}\right)P_k f.$$

$R_r(n)f$ называют типичными средними Рисса порядка r.

Известно ([6], с.134-135), что если чезаровские средние порядка 1 удовлетворяют условию (1), то
1) $\{R_r(n)\}$ – семейство мультипликаторных операторов;
2) при $r_2>r_1>0$ $\{R_{r_2}(n)\}$ лучше чем $\{R_{r_1}(n)\}$.

Здесь $p=n+1$, где $n\in P$. В дальнейшем p будем рассматривать таким же.

В настоящей заметке сравниваются (в смысле аппроксимации) процессы суммирования, определяемые семействами мультипликаторных операторов, с процессом Рисса порядка $r>0$ в произвольном банаховом пространстве. При этом используются определения и результаты работы [6].

При рассмотрении нами процесса суммирования с положительным ядром для случая, когда функция $\varphi(x)$ выпуклая в $(0,+\infty)$ (где φ определяет семейство мультипликаторных операторов, как в теореме Б), показано, что процесс не может быть лучше процесса $\{R_r(n)\}$ при $r>1$. Получены также: 1) достаточные условия эквивалентности процесса с

положительным ядром процессу $\{R_1(n)\}$;
2) для процесса суммирования (без условия положительности ядра) необходимое и достаточное условие того, чтобы он был лучше $\{R_\tau(n)\}$ при любом $\tau>0$.

Результаты другого типа связаны со сравнением произвольного процесса суммирования с процессом Рисса, ранее рассматривались в работах [3,4,5,8,9] .

Лемма I. Пусть I) X – банахово пространство и $\{P_k\}$ как в теореме Б;
2) $\{\tau_k(n)\}$ – семейство последовательностей, для которого существует функция $\varphi(x)\in BQC[0,+\infty)$ такая, что $\tau_k(n)=\varphi(\frac{k}{n+1})$ для любых $k\in P$, $n\in P$;
3) $\{T(n)\}$ – семейство операторов (процесс), ассоциированных с $\{\tau_k(n)\}$, лучше $\{R_\tau(n)\}$ при некотором $\tau>0$.

Тогда

а) $\varphi(0)=1$;

б) существуют конечные нижний и верхний пределы:

$$\varliminf_{n\to\infty}|1-\tau_1(n)|(n+1)^\tau, \quad \varlimsup_{n\to\infty}|1-\tau_1(n)|(n+1)^\tau.$$

Доказательство. В силу теоремы Б $\{\tau_k(n)\}$ является семейством равномерно ограниченных мультипликаторных последовательностей. Для любых $f\in X$ и $n\in P$

$$R_\tau(n)f\sim\sum_{k=0}^{n}\Big[1-\Big(\frac{k}{n+1}\Big)^\tau\Big]P_kf, \quad T(n)f\sim\sum_{k=0}^{\infty}\tau_k(n)P_kf.$$

Так как $\{T(n)\}$ лучше $\{R_\tau(n)\}$ при некотором $\tau>0$, то существует постоянная $B>0$, такая, что при любых $f\in X$ и $n\in P$

$$\|T(n)f-f\|\le B\|R_\tau(n)f-f\| \tag{3}$$

Возьмем $f\in X$ такой, что $P_1f\neq0$ и положим $f_1=P_1f$. Тогда $P_1f_1=f_1$; $P_kf_1=0$ при каждом $k\neq1$. Получаем

$$R_\tau(n)f_1=\sum_{k=0}^{n}\Big[1-\Big(\frac{k}{n+1}\Big)^\tau\Big]P_kf_1=\Big[1-\frac{1}{(n+1)^\tau}\Big]f_1, \quad T(n)f_1=\tau_1(n)f_1.$$

Используя неравенство (3), можем записать

$$|1-\tau_1(n)|\|f_1\|\le\frac{B\|f_1\|}{(n+1)^\tau},$$

откуда

$$|1-\tau_1(n)|\le \frac{B}{(n+1)^2}.$$

Отсюда $\varphi(0)=1$ (учитывается непрерывность функции φ в точке $x=0$), а также следует существование конечных нижнего и верхнего пределов.

Лемма 2. Если выполняются следующие условия:

I) $\varphi(x)$ – выпуклая функция в $(0,+\infty)$;

2) $\varphi(x)\in C_0(-\infty,+\infty)$, $\varphi(0)=1$;

3) существует конечная правая производная $\varphi'(0)$, тогда $\varphi'(0)\ne 0$.

Доказательство. Так как функция φ является выпуклой в $(0,+\infty)$, то она в каждой точке указанного промежутка имеет односторонние производные. Ограничимся рассмотрением правых производных. Известно ([2], с.II4), что $u=\varphi'(x)$ является неубывающей. Нам надо показать, что $\varphi'(0)\ne 0$. Доказываем от противного. Пусть $\varphi'(0)=0$. Тогда $\varphi'(x)\ge 0$ при $x>0$. Отсюда (учитывая, что $\varphi(0)=1$) легко получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\ne 0$. Итак, $\varphi\notin C_0(-\infty,\infty)$. Приходим к противоречию с условием. Следовательно, $\varphi'(0)\ne 0$.

Теорема I. Пусть I) X – банахово пространство и $\{P_k\}$ как в теореме Б;

2) $\{\tau_k(n)\}$ – семейство последовательностей, для которого существует четная функция φ , принадлежащая $C_0(-\infty,\infty)$ и являющаяся выпуклой в $(0,+\infty)$, причем $\tau_k(n)=\varphi(\frac{k}{n+1})$ для любых $k\in P$, $n\in P$.

Тогда семейство $\{T(n)\}$ операторов, ассоциированных с $\{\tau_k(n)\}$, не является лучше $\{R_z(n)\}$ при любом $z>1$.

Доказательство. Так как φ является выпуклой на $(0,+\infty)$ и $\varphi\in C_0(-\infty,\infty)$, то $\varphi\in BQC[0,+\infty)$ (см. [7], с.247). По теореме Б $\{\tau_k(n)\}$ является семейством равномерно ограниченных мультипликаторных последовательностей. Предполагаем, что $\{T(n)\}$ является лучше $\{R_z(n)\}$ при некотором $z>1$. Отсюда в силу леммы I получаем, что $\varphi(0)=1$ и существует конечный $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,[\varphi(\frac{1}{n+1})-1](n+1)^2$.

Так как функция φ выпуклая в $(0,+\infty)$, то в точке $x=0$ существует правая производная φ' (конечная или бесконечная).

а) Пусть производная $\varphi'(0)$ конечная. Тогда по лемме 2 следует, что $\varphi'(0)\ne 0$, то есть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-1}{x}\ne 0$.

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,[\varphi(\frac{1}{n+1})-1](n+1)^2=\infty$

Пришли к противоречию.

б) Если $\varphi'(0)=\infty$, то тоже приходим к противоречию.

Этим доказательство завершается.

Теорема 2. Пусть I) X - банахово пространство, $\{P_k\}$ - последовательность проекций (с требуемыми как в теореме Б условиями) на X;

2) $\{\tau_k(n)\}$ - семейство последовательностей, для которого существует четная функция φ, принадлежащая $C_0(-\infty,+\infty)$ и $B^*QC[0,+\infty)$ такая, что

а) $\tau_k(n)=\varphi(\frac{k}{n+1})$ для любых $k\in P$, $n\in P$;

б) существуют конечные $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1-\varphi(x)}{x}\neq 0$, $\lim\limits_{x\to+0}\varphi''(x)$;

3) ядро $\mathcal{K}(t)$ семейства $\{\tau_k(n)\}$ является положительным.

Тогда семейство $\{T(n)\}$ операторов, ассоциированных с $\{\tau_k(n)\}$, эквивалентно $\{R_1(n)\}$.

Доказательство. По теореме Б $\{\tau_k(n)\}$ является семейством равномерно ограниченных мультипликаторных последовательностей. Покажем, что $\mathcal{N}(T(n)-I)=\mathcal{N}(R_1(n)-I)$. Так как φ удовлетворяет условиям теоремы В, то

$$\varphi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(t)e^{-ixt}dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(t)\cos xt\,dt.$$

Отсюда, учитывая, что $\varphi(0)=1$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(t)dt=1\quad,\quad 1-\varphi(x)=4\int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{K}(t)\sin^2\frac{xt}{2}\,dt.$$

Из того, что ядро $\mathcal{K}(t)$ положительное, следует: $1-\varphi(x)\neq 0$ при любом $x\neq 0$. Далее рассуждая также как в работе ([6], с.134-135) при доказательстве того, что

$$\mathcal{N}(W_2(n)-I)=\mathcal{N}(R_2(n)-I),$$

где $\{W_2(n)\}$ - семейство мультипликаторных операторов Абеля-Картрайта, получаем: $\mathcal{N}(T(n)-I)=\mathcal{N}(R_1(n)-I)$

Пусть $\lambda_1(x)=\dfrac{\varphi(x)-1}{g_1(x)-1}$, где

$$\varphi_1(x)=\begin{cases} 1-|x| & \text{при} \quad |x|\le 1, \\ 0 & \text{при} \quad |x|\geqslant 1. \end{cases}$$

Так как $\lambda_1(x)$ – четная функция, ограничиваемся рассмотрением $x\geqslant 0$. Имеем

$$\lambda_1(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\varphi(x)}{x} & \text{при} \quad 0\le x\le 1 \\ 1-\varphi(x) & \text{при} \quad x\geqslant 1. \end{cases}$$

Покажем, что $\lambda_1(x)$ и $\dfrac{1}{\lambda_1(x)}$ принадлежат $BQC[0,+\infty)$. Имеем

$$\lambda_1'(x)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x)-1-x\varphi'(x)}{x^2} & \text{при} \quad 0<x<1, \\ -\varphi'(x) & \text{при} \quad x\geqslant 1. \end{cases}$$

Здесь предполагается, что рассматривается правая производная в тех точках, где она разрывна. Учитывая существование конечного $\lim\limits_{x\to+0}\varphi''(x)$, получаем, что $\lambda_1'(x)$ является ограниченной функцией на каждом сегменте $[a,b]\subset[0,+\infty)$. Следовательно, $\lambda_1(x)\in AC_{loc}[0,+\infty)$. Отсюда (с учетом того, что $\lambda_1(x)\neq 0$ при любом x) следует $\dfrac{1}{\lambda_1(x)}\in AC_{loc}[0,+\infty)$. Так как $\varphi(x)\in B^*QC[0,+\infty)$, то легко получаем, что $\lambda_1'\in BV_{loc}(0,+\infty)$. Далее из того, что $\lambda_1^2\in AC_{loc}[0,+\infty)$ и $\lambda_1(x)\neq 0$ имеем $\left(\dfrac{1}{\lambda_1(x)}\right)'\in BV_{loc}(0,\infty)$. Для второй производной можем записать

$$\lambda_1''(x)=\begin{cases} \dfrac{2p(x)}{x}-\dfrac{\varphi''(x)}{x} & \text{почти везде в } (0,1), \\ -\varphi''(x) & \text{почти везде в } (1,+\infty), \end{cases}$$

где

$$p(x)=\frac{x\varphi'(x)+1-\varphi(x)}{x^2}.$$

Далее учитывая, что интегралы

$$\int_0^1 |2p(x)-\varphi''(x)|\,dx, \quad \int_1^\infty x|\varphi''(x)|\,dx$$

сходятся, получаем сходимость интеграла $\displaystyle\int_0^\infty x|\lambda_1''(x)|\,dx$.

Отсюда

$$\int_0^\infty x\,|d\lambda_1'(x)| < \infty .$$

Аналогично убеждаемся, что

$$\int_0^\infty x\left|\left(\frac{1}{\lambda_1(x)}\right)''\right|dx < \infty . \qquad \text{Отсюда} \quad \int_0^\infty x\left|d\left(\frac{1}{\lambda_1(x)}\right)'\right| < \infty .$$

Учитывая ограниченность функций $\lambda_1(x)$ и $\frac{1}{\lambda_1(x)}$ на $[0,+\infty)$, делаем вывод, что

$$\lambda_1(x)\in BQC[0,+\infty) \ , \quad \frac{1}{\lambda_1(x)}\in BQC[0,+\infty).$$

Следовательно, из теорем (Б и А) следует, что $\{T(n)\}$ эквивалентно $\{R_1(n)\}$. Итак, доказательство завершено.

Замечание I. Нетрудно убедиться, что если в условиях предыдущей теоремы потребовать следующее:

$\varphi\in BQC[0,+\infty)$ (вместо $B^*QC[0,+\infty)$),

то утверждение теоремы остается справедливым.

Очевидно, имеет место следующее

Следствие I. Пусть I) такое же, как в теореме 2;
2) $\{\tau_k(n)\}$ - семейство последовательностей, для которого существует четная функция φ , принадлежащая $C_0(-\infty,\infty)$ и являющаяся выпуклой в $(0,+\infty)$, такая, что

а) $\tau_k(n)=\varphi(\frac{k}{n+1})$ для любых $k\in P$, $n\in P$;

б) существуют конечные $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1-\varphi(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+0}\varphi''(x)$.

Тогда семейство $\{T(n)\}$ операторов, ассоциированных с $\{\tau_k(n)\}$, эквивалентно $\{R_1(n)\}$.

Теорема 3. Пусть I) X - банахово пространство и $\{P_k\}$ как в теореме Б;
2) $\{\tau_k(n)\}$ - семейство последовательностей, для которого существует функция $\varphi(x)\in B^*QC[0,+\infty)$ такая, что

а) $\tau_k(n)=\varphi(\frac{k}{n+1})$ $k\in P$, $n\in P$;

б) $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема в точке $x=0$.

Для того чтобы семейство $\{T(n)\}$ операторов, ассоциированных с $\{\tau_k(n)\}$, было лучше $\{R_\tau(n)\}$ при любом $\tau>0$, необходимо и достаточно, чтобы

$\varphi(0)=1$, $\varphi^{(n)}(0)=0$ при каждом $n\in N$.

Достаточность. Как и в теореме 2 ясно, что $\{\tau_k(n)\}$ является семейством равномерно ограниченных мультипликаторных последовательностей. Пусть $\tau>0$. Убедимся, что $\mathcal{N}(R_\tau(n)-I)\subseteq\mathcal{N}(T(n)-I)$. Пусть $f\in\mathcal{N}(R_\tau(n)-I)$. Отсюда $(R_\tau(n)-I)f=0$ и $P_k(R_\tau(n)f-f)=0$, где $k\in P$. Далее, учитывая, что семейство мультипликаторных операторов $\{R_\tau(n)-I\}$ ассоциирует с $\left\{\left(\frac{k}{n+1}\right)^\tau\right\}$, получаем

$$\left(\frac{k}{n+1}\right)^\tau P_k f=0 \tag{4}$$

при любом $k\in P$. Так как $\left(\frac{k}{n+1}\right)^\tau\neq 0$ при $k\neq 0$, то из (4) следует, что $P_k f=0$ при любом $k\in\mathbb{N}$. Отсюда в силу тотальности $\{P_k\}$ следует, что $P_0 f=f$. Покажем, что $(T(n)-I)f=0$. Рассматриваем $P_k(T(n)f-f)$, где $k\in P$. Используя, что $\{\tau_k(n)\}$ является семейством мультипликаторных последовательностей для семейства операторов $\{T(n)\}$, получаем

$$P_k(T(n)f-f)=(\tau_k(n)-1)P_k f=\left(\varphi\left(\frac{k}{n+1}\right)-1\right)P_k f.$$

Из того, что $\varphi(0)=1$ и $P_k f=0$ при каждом $k\in\mathbb{N}$, имеем

$$P_k(T(n)f-f)=0 \quad \text{при каждом} \quad k\in P.$$

Отсюда в силу тотальности последовательности $\{P_k\}$ заключаем, что $(T(n)-I)f=0$. Итак, $f\in\mathcal{N}(T(n)-I)$. Показано требуемое включение.

Пусть $\lambda_\tau(x)=\dfrac{1-\varphi(x)}{1-g_\tau(x)}$, где

$$g_\tau(x)=\begin{cases}1-|x|^\tau, & \text{если } |x|\le 1,\\ 0, & \text{если } |x|\ge 1.\end{cases}$$

Так как $\lambda_\tau(x)$ – четная функция, ограничиваемся рассмотрением $x\ge 0$. Имеем

$$\lambda_\tau(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\varphi(x)}{x^\tau} & \text{при } 0<x\le 1,\\ 1-\varphi(x) & \text{при } x\ge 1.\end{cases}$$

Покажем, что $\lambda_\tau(x)\in BQC[0,+\infty)$. Во-первых, так как $\varphi(0)=1$ и $\varphi^{(n)}(0)=0$ при каждом $n\in\mathbb{N}$, то элементарным путем убеждаемся, что при любом $\tau>0$

$$\lim_{x\to+0}\frac{1-\varphi(x)}{x^\tau}=0. \tag{5}$$

Имеем

$$\lambda_r'(x)=\begin{cases} \dfrac{r(\varphi(x)-1)}{x^{r+1}}-\dfrac{\varphi'(x)}{x^r} & \text{при} \quad 0<x<1 \ , \\ -\varphi'(x) & \text{при} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Здесь рассматривается правосторонняя производная в тех точках, где она разрывна. Очевидно,

$$\lim_{x\to+0}\lambda_r'(x)=0\ . \tag{6}$$

Также легко убеждаемся, что

$$\lim_{x\to+0}\lambda_r''(x)=0 \tag{7}$$

Теперь из (5), (6), (7), используя, что $\varphi(x)\in B^*QC[0,+\infty)$ и простейшие свойства абсолютно непрерывных функций, заключаем, что

$$\lambda_r(x)\in AC_{loc}[0,+\infty)\ ,\quad \lambda_r'(x)\in BV_{loc}(0,+\infty)$$

и интеграл $\int\limits_0^\infty x\,|\lambda_r''(x)|dx$ сходится. Отсюда $\int\limits_0^\infty x|d\lambda_r'(x)|<\infty$.

Итак, с учетом ограниченности $\lambda_r(x)$ на $[0,+\infty)$, следует, что $\lambda_r(x)\in BQC[0,+\infty)$. Применяя теоремы (Б и А), получаем, что $\{T(n)\}$ лучше каждого $\{R_r(n)\}$ при $r>0$.

<u>Необходимость</u>. В силу леммы I следует, что $\varphi(0)=1$. Теперь докажем, что $\varphi^{(n)}(0)=0$ при каждом $n\in N$. Доказательство проводим от противного. Пусть m – наименьший порядок производной, отличной от нуля в точке $x=0$ и $r>m$. Получаем

$$\lim_{x\to+0}\frac{\varphi(x)-1}{x^r}=\lim_{x\to+0}\frac{\varphi^{(m)}(x)}{r(r-1)\cdots(r-m+1)x^{r-m}}=\infty\ .$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\left[\varphi\left(\tfrac{1}{n+1}\right)-1\right](n+1)^r=\infty\ ,$$

что противоречит лемме I. Этим доказательство завершается.

В заключение приведем пример семейства мультипликаторных операторов, которое лучше $\{R_r(n)\}$ при любом $r>0$.

Пусть X – банахово пространство. Рассматриваем

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1 & \text{, если} \quad |x|\leq 1\ , \\ 2-|x| & \text{, если} \quad 1\leq|x|\leq 2\ , \\ 0 & \text{, если} \quad |x|\geq 2\ , \end{cases}$$

$$T(n)f = \sum_{k=0}^{2n+1} \varphi\left(\frac{k}{n+1}\right) P_k f \quad ,$$

которые будем называть средними Валле-Пуссена (см. [I], с.I35). Легко проверяется, что $\varphi(x)$ удовлетворяет требуемым условиям теоремы 3. Следовательно, $\{T(n)\}$ лучше $\{R_\tau(n)\}$ при любом $\tau > 0$.

В заключение выражаю сердечную благодарность доценту Таллинского политехнического института А.А.Кивинукку за ценные указания в работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

I. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. I. - М.: Изд-во "Мир", I965. - 6I5с.
2. Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. - М.: Изд-во иностр.лит., I948. - 456с.
3. Жук В.В. Аппроксимация периодических функций. - Л.: Изд-во ЛГУ, I982. - 366с.
4. Кивинукк А. О порядке приближения в пространстве Банаха. Уч.зап.Тартуск. ун-та, I975, 355, I65-I78.
5. Кивинукк А. Теоремы сравнения методов суммирования разложений Фурье в пространстве Банаха. - Уч.зап.Тартуск. ун-та, I978, 448, 3I-39.
6. Butzer, P.L., Nessel, R.J., Trebels, W. On summation processes of Fourier expansions in Banach spaces. I // Tohoku Math. J., - 1972. - Vol. 24, N° 2. - P. 127-140.
7. Butzer, P.L., Nessel, R.J. Fourier analysis and approximation. I - New-York, London: Acad. Press, 1971. - 555 p.
8. Kivinukk, A. Stetigkeitsmodul und Fourier-Entwicklungen in Banach-Räumen. // Ann. Univ. Sci. Budapest, Sec. Math. - 1981. - Vol. 24. - P. 193-204.
9. Kivinukk, A. Comparison theorems of summation methods with estimations of constants. // Изв. АН ЭССР, физ., матем. - I982. - Вып. 3I, № I. - С. I7-24.

Поступила 02.I2.88

ON COMPARISON OF APPROXIMATION PROCESSES WITH RIESZ MEANS IN BANACH SPACES

D.A.Kogan

Summary

In this paper approximation processes of multiplier type are compared with Riesz means $R_\tau(n)$ of order $\tau>0$ with respect to their rate of convergence in Banach spaces. If a convex function φ defines an approximation process with positive kernel, then this approximation process is not better than Riesz means of some order $\tau>0$. Sufficient conditions are given in order that a positive approximation process and Riesz means $R_1(n)$ are equivalent, and also sufficient and necessary conditions, in order that an approximation process is better that Riesz means $R_\tau(n)$ for every $\tau>0$.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989, 846, 150-159

LEBESGUE FUNCTIONS AND CONVERGENCE OF FUNCTIONAL SERIES WITH SPEED ALMOST EVERYWHERE

H. Türnpu

Tartu State University

1. Let $\varphi = \{\varphi_k\}$ be a system of functions defined in $e = [a, b]$, let $\lambda = (\lambda_k)$ a sequence with $\lambda_k > 0$ and $\lambda_k \to \infty$ and let $x = (\xi_k) \in \ell^2_\lambda$ i.e.

$$\sum \xi_k^2 \lambda_k^2 < \infty .$$

We consider the series in form

$$\sum \xi_k \varphi_k(t) \tag{1}$$

where $x \in \ell^2_\lambda$.

A series (1) for $x_0 = (\xi_k^0) \in \ell^2_\lambda$ is called converging with speed λ (or λ-converging) almost everywhere (a.e.) in e if the series (1) for $x_0 \in \ell^2_\lambda$ is convergent a.e. in e and the limit

$$\lim_n \lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k^0 \varphi_k(t)$$

exists a.e. in e.

The aim of the present article is to determine the necessary and sufficient conditions for the λ-convergence a.e. in e of the series (1), where $x \in \ell^2_\lambda$.
Let $\mathcal{M}$ denote a decomposition of e, i.e.

$$\mathcal{M} = \{ \mathcal{M}_{mn},\ n = 0, 1, \ldots, m \}$$

and

$$\mathcal{M}_{mn} \cap \mathcal{M}_{mk} = \emptyset \quad \text{if } n \neq k .$$

The following result was proved in [3].

Theorem A. The series (1) is convergent a.e. in e for all $x \in \ell^2$ iff for each $\varepsilon > 0$ there exist a measurable subset $T_\varepsilon \subset e$ where $mes\, T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ and a constant $M_\varepsilon > 0$ such that the inequality

$$\left| \int_{T_\varepsilon} \int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^{m} \chi_{mn}(t) \sum_{p=0}^{m} \chi_{mp}(\tau) \sum_{k=0}^{\min(n,p)} \varphi_k(t) \varphi_k(\tau)\, dt\, d\tau \right| \le M_\varepsilon \tag{2}$$

holds uniformly for every decomposition $\mathcal{M}$ of e where

$$\chi_{mn}(t) = \chi_{\mathcal{M}_{mn}}(t) .$$

We get from this theorem

Corollary A. If the ineguality

$$\sup_n \int_e \left| \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(t)\varphi_k(\tau) \right| d\tau < \infty$$

holds a.e. in e, then the series (1) is convergent a.e. in e for each $x \in \ell^2$.

The main result of this paper is the following

Theorem. The series (1) is λ-convergent a.e. in e for all $x \in \ell^2_\lambda$ iff for each $\varepsilon > 0$ there exists a measurable subset $T_\varepsilon \subset e$ where $mes T_\varepsilon > b-a-\varepsilon$ and a constant $M_\varepsilon > 0$ such that the inequality

$$\left| \int_{T_\varepsilon} \int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^{m-1} y_{m_n}(t) \lambda_n \sum_{p=0}^{n-1} y_{m_p}(\tau) \lambda_p \sum_{k=\max(n,p)+1} \lambda_k^{-2} \varphi_k(t) \varphi_k(\tau) \, dt \, d\tau \right| \le M_\varepsilon \quad (3)$$

holds uniformly for every decomposition $\mathfrak{M}$ of e.

Corollary. If the inequality

$$\sup_{m,n} \lambda_n \int_e \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2} \right| d\tau < \infty$$

holds a.e. in e, then the series (1) is λ-convergent a.e. in e for each $x \in \ell^2_\lambda$.

2. We now recall some definitions and give a lemma (lemma 1) which has been given by Nikishin (see [2]). Let M_e denote the space of all measurables and a.e. in e finite functions f with

$$\|f\| = \inf_{\alpha > 0} \{ \alpha + mes(t \in e : |f(t)| > \alpha) \}.$$

We say that the operator A from ℓ^2 into M_e is open-linear if for every $x \in \ell^2$ there exists a linear operator T_x from ℓ^2 into M_e so that

1° $T_x(x) = A(x)$

and

2° $|T_x(y,t)| \le |A(y,t)|$

for every $y \in \ell^2$ a.e. in e.

We say that the set $Q \subset M_e$ is bounded in measure if for each $\varepsilon > 0$ there exists a constant $R_\varepsilon > 0$ so that

$$mes\{t \in e : |y(t)| \geq R_\varepsilon\} \le \varepsilon$$

for all $y \in Q$.

We say that the openlinear operator A from ℓ^2 into M_e is bounded if the set

$$\{A(x) : \|x\| \le 1\}$$

is bounded in measure.

Lemma 1. Let A be a bounded openlinear operator from ℓ^2 into M_e. Then for each $\varepsilon>0$ there exist a measurable subset $T_\varepsilon\subset e$ where $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b-a-\varepsilon$ and a constant $M_\varepsilon>0$ so that

$$\int_{T_\varepsilon} |A(x,t)|\,dt \le M_\varepsilon \|x\|$$

for all $x\in\ell^2$.

Following lemmae will be used for proving the main theorem.

Lemma 2. Let the series (1) is λ-convergent a.e. in e for each $x\in\ell^2_\lambda$. Then the operator D from ℓ^2 into M_e, where

$$D(z,t)=\sup_n \lambda_n \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k \xi_k \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\Big|$$

with $z=(\lambda_k\xi_k)$ is bounded and openlinear.

Proof. It was shown by Nikishin that D is openlinear (see [2] p. 135). We shall prove the boundedness of D. Let us denote

$$D_m(z,t)=\max_{n\le m}\lambda_n\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k\xi_k\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\Big|.$$

As the inequality

$$D_m(z,t)\le D(z,t)$$

holds a.e. in e therefore from the λ-convergence of a series (1) a.e. in e for every $x\in\ell^2_\lambda$ we get that the equality

$$\lim_{\beta\to 0}\beta\, D_m(z,t)=0$$

holds a.e. in e for all $z\in\ell^2$ and uniformly in m.

Consequently, in space M_e for all $z\in\ell^2$ the equality

$$\lim_{\beta\to 0}\beta\, D_m(z)=\Theta$$

holds uniformly in m.

By the principle of equicontinuity we have that

$$\lim_{z\to\theta} D_m(z)=\Theta$$

holds uniformly in m.

From this it follows, that there exists a constant $M>0$ such that for all z, $\|z\|<1$

$$\|D_m(z)\|\le M$$

holds uniformly in m.

Since in M_e

$$\lim D_m(z)=D(z),$$

we have

$$\lim_{\beta\to 0} \beta D(z) = \theta$$

uniformly in the unit sphere of ℓ^2.

It means that for each $\varepsilon > 0$ there exists a constant $\beta_\varepsilon > 0$ such that for all z from unit sphere of ℓ^2 holds

$$\inf_{\alpha>0} \{\alpha + \operatorname{mes}(t\in e:\ D(z,t) > \tfrac{\alpha}{\beta_\varepsilon})\} < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Furthermore, there exists a constant $\alpha_\varepsilon > 0$ such that

$$\inf_{\alpha>0} \{\alpha + \operatorname{mes}(t\in e:\ D(z,t) > \tfrac{\alpha}{\beta_\varepsilon})\} >$$

$$> \alpha_\varepsilon + \operatorname{mes}(t\in e:\ D(z,t) > \alpha_\varepsilon/\beta_\varepsilon) - \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Let $R_\varepsilon = \alpha_\varepsilon/\beta_\varepsilon$, then

$$\operatorname{mes}\{t\in e:\ D(z,t) > R_\varepsilon\} < \varepsilon$$

for all z from the unit sphere of ℓ^2, i.e. D is a bounded openlinear operator from ℓ^2 into M_e.

Lemma 3 [4]. Let f be a measurable function in e. Then the inequality

$$|f(t)| < \infty$$

holds a.e. in e, iff for each $\varepsilon > 0$ there exists a measurable subset $T_\varepsilon \subset e$ where $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b-a-\varepsilon$ such that

$$\int_{T_\varepsilon} |f(t)|\,dt < \infty.$$

Lemma 4 [4]. Let (f_n) be a sequence of functions which are integrable in e. Then

$$\sup_n |f_n(t)| < \infty$$

holds a.e. in e iff for each $\varepsilon > 0$ there exist a measurable subset $T_\varepsilon \subset e$ where $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b-a-\varepsilon$ and a constant $M_\varepsilon > 0$ such that the inequality

$$\left|\int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^{m} x_{mn}(t) f_n(t)\,dt\right| \le M_\varepsilon$$

holds uniformly for every decomposition $\mathcal{M}$ of e.

Lemma 5 ([1] p. 361). Let D_m $(m\in\mathbb{N})$ be continuous homogenous operators from ℓ^2 into M_e and suppose that the inequality

$$|D_m(x_1+x_2,t)| \le |D_m(x_1,t)| + |D_m(x_2,t)|$$

holds. Then, if

1° $$\sup_n |D_n(x,t)| < \infty$$

a.e. in e for any $x\in\ell^2$ and there exists

2° $\lim_n D_n(\tilde{x},t)$

a.e. in e for any $\tilde{x}$ from a total set in ℓ^2, then there exists

$$\lim_n D_n(x,t)$$

a.e. in e for each $x \in \ell^2$.

3. P r o o f o f t h e t h e o r e m. Let the series (1) is for all $x \in \ell^2_\lambda$ λ-convergent a.e. in e. Let C_n $(n \in N)$ be bounded and linear operators from ℓ^2 into M_e defined by

$$C_n(z,t) = \lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k \lambda_k \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}.$$

Let us write

$$D(z,t) = \sup_n |C_n(z,t)|.$$

By lemma 2 the operator D from ℓ^2 into M_e is bounded and openlinear. By lemma 1 for each $\varepsilon>0$ there exist a measurable subset $T_\varepsilon \subset e$ where $mes T_\varepsilon > b-a-\varepsilon$ and a constant $K_\varepsilon>0$ such that the inequality

$$\int_{T_\varepsilon} D(z,t)\,dt \le K_\varepsilon \left(\sum \xi_k^2 \lambda_k^2\right)^{1/2} \tag{4}$$

holds.

By Levi's theorem the inequality (4) is equivalent to the inequality

$$\int_{T_\varepsilon} \max_{n \le m-1} \left|\lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right| dt \le K_\varepsilon \left(\sum \xi_k^2 \lambda_k^2\right)^{1/2} \tag{5}$$

uniformly in m.

By lemmae 3 and 4 the inequality (5) is equivalent to the following inequality

$$|E_m z| := \left|\int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^{m-1} x_{mn}(t)\lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\,dt\right| \le K_\varepsilon \left(\sum \xi_k^2 \lambda_k^2\right)^{1/2} \tag{6}$$

where K_ε does not depend on m.

Let us write

$$G_m z = \int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^{m-1} x_{mn}(t)\lambda_n \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k \xi_k \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\,dt$$

and let

$$|F_m z| = \left|\int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^{m-1} x_{mn}(t)\lambda_n \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\,dt\right| \le$$

$$\le \int_{T_\varepsilon} \lambda_m \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right| dt \le$$

$$\leq \int_{T_\varepsilon} D(z,t)\,dt,$$

then

$$|G_m z| - |F_m z| \leq |E_m z| \leq |G_m z| + |F_m z|. \tag{7}$$

Together, (4) and (7) imply that the inequality (6) is equivalent to the following inequality

$$|G_m z| \leq \bar{K}_\varepsilon \left(\sum \xi_k^2 \lambda_k^2\right)^{1/2} \tag{8}$$

uniformly in m. On the other hand we have

$$|G_m z| = \left|\sum_{k=0}^{m} \lambda_k \xi_k \int_{T_\varepsilon} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} \sum_{n=0}^{k-1} x_{mn} \lambda_n \,dt\right| =$$

$$\leq \left\{\sum_{k=0}^{m} c_k^2 (\mathfrak{M}, m, \varepsilon)\right\}^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{m} \xi_k^2 \lambda_k^2\right)^{1/2},$$

where

$$c_k(\mathfrak{M}, m, \varepsilon) = \int_{T_\varepsilon} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} \sum_{n=0}^{k-1} x_{mn}(t) \lambda_n \,dt.$$

Then it follows (by the principle of uniformly boundedness), that the inequality (8) is equivalent to the following inequality

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_k^2 (\mathfrak{M}, m, \varepsilon) \leq L_\varepsilon \tag{9}$$

where L_ε does not depend on $\mathfrak{M}$.

Since

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_k^2 (\mathfrak{M}, m, \varepsilon) =$$

$$= \int_{T_\varepsilon}\int_{T_\varepsilon} \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2} \sum_{n=0}^{k-1} x_{mn}(t)\lambda_n \sum_{p=0}^{k-1} x_{mp}(\tau)\lambda_p \,dt\,d\tau =$$

$$= \int_{T_\varepsilon}\int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^{m-1} x_{mn}(t)\lambda_n \sum_{p=0}^{n} x_{mp}(\tau)\lambda_p \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}\,dt\,d\tau +$$

$$+ \int_{T_\varepsilon}\int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^{m-1} x_{mn}(t)\lambda_n \sum_{p=n+1}^{m} x_{mp}(\tau)\lambda_p \sum_{k=p+1}^{m} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}\,dt\,d\tau =$$

$$= \int_{T_\varepsilon}\int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^{m-1} x_{mn}(t)\lambda_n \sum_{p=0}^{m-1} x_{mp}(\tau)\lambda_p \sum_{k=\max(n,p)+1} \lambda_k^{-2} \varphi_k(t)\varphi_k(\tau)\,dt\,d\tau,$$

it follows that (9) and (3) are equivalent.

Suppose that inequality (3) holds; then the inequality (5) holds and therefore

$$\int_{T_\varepsilon} \max_{n \le m-1} \left| \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k \xi_k \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} \right| dt \le K_\varepsilon \left(\sum \xi_k^2 \lambda_k^2 \right)^{1/2}$$

uniformly in m .

Using the method that was used above to show inequality (9) we get that

$$\sup_{\mathcal{M}} \sum_{k=0}^{m} \bar{c}_k^2 (\mathcal{M}, m, \varepsilon) \le L_\varepsilon \tag{10}$$

where

$$\bar{c}_k(\mathcal{M}, m, \varepsilon) = \int_{T_\varepsilon} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} \sum_{n=0}^{k-1} x_{mn}(t)\, dt .$$

By the Cauchy-Bunjakovskii inequality it follows that

$$|H_m| := \left| \sum_{k=0}^{m} \bar{c}_k(\mathcal{M}, m, \varepsilon) \bar{c}_k(\mathcal{N}, m, \varepsilon) \right| \le L_\varepsilon \tag{11}$$

uniformly for each decomposition $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ of e .

Since

$$H_m = \int_{T_\varepsilon} \int_{T_\varepsilon} \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi_k(t) \varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2} \sum_{n=0}^{k-1} x_{mn}(t) \sum_{p=0}^{k-1} x_{\mathcal{N}_{mp}}(\tau)\, dt\, d\tau$$

then for $\mathcal{N}_{m0} = T_\varepsilon$ and $\mathcal{N}_{mp} = \emptyset$ $(1 \le p \le m)$ we have from (11) that the following inequality

$$|G_m| := \left| \int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^{m} x_{mn}(t) \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k^2} \int_{T_\varepsilon} \varphi_k(\tau)\, d\tau\, dt \right| \le L_\varepsilon \tag{12}$$

holds uniformly for every decomposition $\mathcal{M}$ of e .
For the case $\mathcal{M}_{m0} = \mathcal{N}_{m0} = T_\varepsilon$ and $\mathcal{M}_{mn} = \mathcal{N}_{mn} = \emptyset$ for $1 \le n \le m$ we get in the similar way that

$$\left| \int_{T_\varepsilon} \int_{T_\varepsilon} \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi_k(t) \varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}\, dt\, d\tau \right| \le L_\varepsilon \tag{13}$$

holds uniformly in m .

Because of

$$G_m = \int_{T_\varepsilon} \int_{T_\varepsilon} \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi_k(t) \varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}\, dt\, d\tau -$$

$$- \int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^{m} x_{mn}(t) \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k^2} \int_{T_\varepsilon} \varphi_k(\tau)\, d\tau\, dt ,$$

inequalities (12) and (13) imply that

$$|J_m| := \left| \int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^{m} x_{mn}(t) \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k^2} \int_{T_\varepsilon} \varphi_k(\tau)\, d\tau\, dt \right| \le L_\varepsilon \tag{14}$$

holds, where L_ε does not depend on $\mathfrak{M}$.

If $\mathfrak{M}_{m0}=T_\varepsilon$, $\mathfrak{M}_{mn}=\emptyset$ for $1\le n\le m$, $\mathfrak{M}_{mn}=\emptyset$ for $0\le n\le m-1$ and $\mathfrak{M}_{mm}\ne\emptyset$, then (11) implies

$$|J_m|:=\left|\int_{\mathfrak{M}_{mm}}\int_{T_\varepsilon}\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi_k(t)\,\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}\,dt\,d\tau\right|\le L_\varepsilon. \qquad (15)$$

Since

$$\sum_{k=0}^{m}\bar{c}_k^2(\mathfrak{M},m,\varepsilon)=$$

$$=\int_{T_\varepsilon}\int_{T_\varepsilon}\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi_k(t)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}\,dt\,d\tau-2J_m-J_m-K_m,$$

where

$$K_m=\int_{T_\varepsilon}\int_{T_\varepsilon}\sum_{n=0}^{m-1}x_{mn}(t)\sum_{p=0}^{m-1}x_{mp}(\tau)\sum_{k=0}^{\min(n,p)}\frac{\varphi_k(t)\varphi_k(\tau)}{\lambda_k^2}\,dt\,d\tau,$$

from (10),(13),(14) and (15) it follows that

$$|K_m|\le 5L_\varepsilon.$$

By theorem A we have that the series (1) is a.e. in e convergent for all $x\in\ell^2_\lambda$.

Now the ineguality (4) follows from the ineguality (3). Hence by lemma 3 we have that

$$D(z,t)<\infty$$

holds a.e. in e for each $z\in\ell^2$.

Since

$$D_n(e_i,t)=\begin{cases}\lambda_n\varphi_i(t), & \text{for } n\le i,\\ 0, & \text{for } n>i\end{cases}$$

where $e_i=(\delta_{ki})$, there exists

$$\lim_n D_n(e_i,t)$$

for every $i\in N$ a.e. in e. By lemma 5 we have, that there exists

$$\lim_n D_n(z,t)$$

a.e. in e for all $z\in\ell^2$ i.e. the series (1) is λ-convergent a.e. in e for all $x\in\ell^2_\lambda$.

1. Dunford, N., Schwarz, J., Linear operators, Part: General theory. New York, 1958.
2. Никишин Е.М. Резонансные теоремы и надлинейные операторы. // Успехи матем. наук. - 1970. - Вып. 25. - С. 129-191.
3. Тюрнпу Х., О значении функции Лебега для сходимости и суммируемости функциональных рядов почти всюду // Ann. Univ. Sci. Budapest. - 1973. - Vol. 16. - P. 125-132.

4. Тюрнпу Х., О сходимости функциональных рядов почти всюду // Уч. зап. Тартуск ун-та. - 1971. - Вып. 281. - С. 140-151.

Received 12.12.88

ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА И СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ СО СКОРОСТЬЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Х. Тюрнпу

Резюме

Рассмотрим систему интегрируемых на отрезке $e=[a,b]$ функций $\varphi=\{\varphi_k\}$ и рядов вида (1), где $x=(\xi_k)\in\ell^2_\lambda$ т.е.

$$\sum \xi_k^2 \lambda_k^2 < \infty$$

с $0<\lambda_k\to\infty$.
Говорят, что ряд (1) для $x_0=(\xi_k^0)$ является почти всюду (п.в.) на e сходящимся со скоростью λ (короче λ-сходящимся), если п.в. на e сходится ряд (1) с $x=x_0$ и п.в. на e существует предел

$$\lim_n \lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k^0 \varphi_k(t).$$

В настоящей заметке мы исследуем λ-сходимость п.в. рядов(1) для $x\in\ell^2_\lambda$ при помощи т.н. функций Лебега. Мы докажем следующее утверждение

Теорема. Для того, чтобы ряд (1) для всех $x\in\ell^2_\lambda$ λ-сходился п.в. на e, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon>0$ нашлись постоянное $M_\varepsilon>0$ и измеримое подмножество $T_\varepsilon\subset e$ с $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b-a-\varepsilon$ такие, что равномерно относительно всех подразделений m отрезка e на произвольное число измеримых и непересекающихся частей имело место неравенство (3).

LEBESQUE'I FUNKTSIOONID JA FUNKTSIONAALRIDADE KIIRUSEGA KOONDUVUS PEAAEGU KÕIKJAL

H. Türnpu

Resümee

Olgu $\varphi=\{\varphi_k\}$ lõigus $e=[a,b]$ integreeruvate funktsioonide φ_k süsteem ja olgu $x=(\xi_k)$ ruumist ℓ^2_λ s.t.

$$\sum \xi_k^2 \lambda_k^2 < \infty,$$

kus $\lambda = (\lambda_k)$ on kiirus, s.o. $0 < \lambda_k \to \infty$. Vaatleme ridu kujus (1).

Öeldakse, et rida (1) on $x_0 \in \ell^2_\lambda$ korral peaaegu kõikjal (p.k.) lõigus e kiirusega λ koonduv (e. λ-koonduv), kui rida (1) koondub p.k. lõigus e $x_0 \in \ell^2_\lambda$ korral ja eksisteerib piirväärtus

$$\lim_n \lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k^0 \varphi_k(t).$$

Me tõestame, et kehtib

Teoreem. Selleks, et rida (1) oleks p.k. lõigus e λ-koonduv iga $x \in \ell^2_\lambda$ korral on tarvilik ja piisav, et iga $\varepsilon > 0$ korral leiduks konstant $M_\varepsilon > 0$ ja mõõtuv alamhulk $T_\varepsilon \subset e$ nii, et $mes T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ ja võrratus (3) kehtib ühtlaselt kõikide lõigu e alajaotuste m suhtes.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1989, 846, 160-165

ТЕОРЕМА ЦЕЛЛЕРА ДЛЯ λ-СУММИРУЕМОСТИ

Э. Юриммэ

Тартуский государственный университет

В теории суммируемости хорошо известна теорема Целлера о том, что каждый линейный непрерывный функционал в поле суммируемости данного матричного метода A можно рассматривать как B-предел для некоторого другого матричного метода B (см. [4], теорема 5.3). Эта теорема нашла широкое применение при изучении общих свойств (таких как включение, совместност , совершенность, заменимость и др.) матричных методов суммирования. В данной заметке докажем аналогичную теорему для λ-суммируемости. Этот вид суммируемости был введен Г.Кангро. Он же дал и топологический аппарат для изучения λ-суммируемости (см. [2,3]).

Пусть $\lambda=(\lambda_n)$ — возрастающая к бесконечности последовательность положительных чисел. Последовательность $x=(\xi_k)$ называется λ-сходящейся, если существует предел

$$\lim_n \lambda_n(\xi_n-\xi), \text{ где } \xi=\lim_n \xi_n .$$

Множество всех λ-сходящихся последовательностей обозначается через c^λ и оно является BK-пространством с нормой

$$\|x\| = \sup_n \{|\beta_n|, |\xi|\},$$

где $\beta_n = \lambda_n(\xi_n-\xi)$.

Пусть $A=(a_{nk})$ — некоторая бесконечная матрица. Последовательность x называется A^λ-суммируемой, если $y=(\eta_n)\in c^\lambda$, где

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\xi_k . \qquad (1)$$

Предел $\lim_n \eta_n=\eta$ называется A-пределом последовательности x и обозначается через $\lim_A x$. Множество всех A^λ-суммируемых последовательностей обозначается через c_A^λ. Оно является FK-пространством (см. [2]). Каждый линейный непрерывный функционал f в пространстве c_A^λ выражается формулой

$$f(x) = \mu\gamma^A + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \gamma_n^A + t\eta + \sum_{k=1}^{\infty} t_k \xi_k, \qquad (2)$$

где $\gamma_n^A = \lambda_n(\eta_n - \eta)$, $\gamma^A = \lim_n \gamma_n^A$, $(\tau_n) \in \ell$ и ряд $\sum t_k \xi_k$ сходится для всех $x = (\xi_k) \in c_A^\lambda$ (см. [2]). Надо отметить, что коэффициенты в выражении (2) в общем определяются неоднозначно.

В данной статье докажем следующую теорему, которая является аналогом вышеупомянутой теоремы Целлера.

Теорема. I) Для каждого функционала $f \in (c_A^\lambda)'$ найдется матрица $B = (b_{nk})$, для которого $c_B^\lambda \supset c_A^\lambda$ и $\gamma^B(x) = f(x)$ для всех $x \in c_A^\lambda$, где

$$\gamma^B(x) = \lim_n \lambda_n \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \xi_k - \lim_B x \Big).$$

2) Если для функционала $f \in (c_A^\lambda)'$ найдется такое представление (2), где $\mu \neq 0$, то B можно выбрать таким образом, что $c_B^\lambda = c_A^\lambda$.

Для доказательства этой теоремы понадобится следующая

Лемма. Матрица

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ \tau_1 & \mu_2 & & 0 \\ \tau_1 & \tau_2 & \mu_3 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \lim_n \mu_n = \mu \neq 0, \quad (\tau_n) \in \ell,$$

определяет метод суммирования, который эквивалентен сходимости, т.е. $c_M = c$.

Доказательство. Легко проверить, что $c_M \supset c$. На основе одной теоремы Мазура-Орлича из соотношения $c_M \supset c$ следует либо $c_M = c$, либо метод M суммирует некоторую неограниченную последовательность. Пусть $v = (\omega_k)$ - некоторая неограниченная последовательность. Выберем такой индекс n, что

$$|\omega_n| > \frac{1}{|\mu|},$$

$$\sum_{k \geq n} |\tau_k| < \frac{|\mu|}{7}$$

$$|\delta_m| = |\mu_m - \mu| < \frac{|\mu|}{2}, \text{ если } m \geq n.$$

Индекс p выбираем таким образом, что ω_{n+p} является первым элементом в последовательности (ω_k), для которого

$$|\omega_{n+p}| > 7|\omega_n|.$$

Рассмотрим последовательность $z = (\zeta_\nu) = Mv$, т.е.

$$\zeta_\nu = \mu_\nu \omega_\nu + \sum_{k=1}^{\nu-1} \tau_k \omega_k .$$

Покажем, что $z \notin c$. Действительно,

$$|\zeta_{n+p} - \zeta_n| = |\mu_{n+p}\, \omega_{n+p} - \mu_n \omega_n + \sum_{k=n}^{n+p-1} \tau_k \omega_k| =$$

$$= |(\mu + \delta_{n+p})\omega_{n+p} - (\mu + \delta_n)\omega_n + \sum_{k=n}^{n+p-1} \tau_k \omega_k| \geq$$

$$\geq |\mu + \delta_{n+p}||\omega_{n+p}| - |\mu||\omega_n| - |\delta_n||\omega_n| - \sum_{k=n}^{n+p-1} |\tau_k||\omega_k| \geq$$

$$\geq \frac{|\mu|}{2} 7|\omega_n| - |\mu||\omega_n| - \frac{|\mu|}{2}|\omega_n| - 7|\omega_n|\frac{|\mu|}{7} = |\mu||\omega_n| > 1,$$

откуда и следует, что $z \notin c$, т.е. $v = (\omega_k) \notin c_M$. Лемма доказана.

Если $\mu_n = \mu \neq 0$ для всех n, то получаем метод Мазура, который занимает важное место при изучении общих свойств матричных методов суммирования.

Кроме выше доказанной леммы для доказательства теоремы мы используем следующую теорему Хана (см.[1], стр. 25).

Для того, чтобы преобразование (1) существовало и переводило все последовательности $x \in \ell$ в $y \in c$, необходимо и достаточно выполнение условий

1° существует $\lim_n a_{nk} = a_k$,

2° $a_{nk} = O(1)$.

При этом для всех $x \in \ell$

$$\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k .$$

Доказательство теоремы. 1) Пусть $C = (c_{nk})$, где

$$c_{nk} = \begin{cases} \tau_k \dfrac{\lambda_k}{\lambda_n} & , k < n, \\ \mu + \dfrac{t}{\lambda_n} - \dfrac{1}{\lambda_n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \tau_\nu \lambda_\nu & , k = n, \\ 0 & , k > n, \end{cases}$$

$Q = CA = (q_{nk})$ и $D = (d_{nk})$, где

$$d_{nk} = \begin{cases} \dfrac{t_k}{\lambda_n} & , k \leq n, \\ 0 & , k > n. \end{cases}$$

Покажем, что условиям теоремы удовлетворяет матрица $B = (b_{nk})$, где

$$b_{nk} = \begin{cases} t_k & , n = 1, \\ d_{nk} + q_{nk} & , n > 1. \end{cases}$$

Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\eta_k = \sum_{k=1}^{n-1}\tau_k \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\eta_k + \Big(\mu + \frac{t}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\tau_\nu\lambda_\nu\Big)\eta_n$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_{nk}\xi_k = \sum_{k=1}^{n-1}\tau_k\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k\nu}\xi_\nu + \Big(\mu+\frac{t}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\tau_\nu\lambda_\nu\Big)\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu}\xi_\nu .$$

Для $n>1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}\xi_k = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n} t_k\xi_k + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k\lambda_k\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k\nu}\xi_\nu + \Big(\mu+\frac{t}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\tau_\nu\lambda_\nu\Big)\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu}\xi_\nu ,$$

откуда

$$\lim\nolimits_B x = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}\xi_k = \mu \lim\nolimits_A x$$

и

$$\gamma_n^B(x) = \lambda_n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}\xi_k - \lim\nolimits_B x\Big) =$$

$$= \lambda_n\Big(\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n} t_k\xi_k + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k\lambda_k\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k\nu}\xi_\nu + \frac{t}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu}\xi_\nu -$$

$$- \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\tau_\nu\lambda_\nu\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu}\xi_\nu + \mu\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu}\xi_\nu - \mu\lim\nolimits_A x\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} t_k\xi_k + \sum_{k=1}^{n-1}\tau_k\lambda_k\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k\nu}\xi_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu}\xi_\nu\Big) +$$

$$+ \mu\lambda_n\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu} - \lim\nolimits_A x\Big) + t\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu}\xi_\nu .$$

Так как $(\tau_k)\in l$, то по теореме Хана

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n-1}\tau_k\lambda_k\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k\nu}\xi_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu}\xi_\nu\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\gamma_k^A$$

и мы получаем, что

$$\gamma^B(x) = \lim_n \gamma_n^B(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k\xi_k + \sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\gamma_k^A + \mu\gamma^A + t\eta^A .$$

Первая часть теоремы доказана, ибо для всех $x\in c_A^\lambda$ имеет место равенство

$$\gamma^B(x) = f(x).$$

2) Учитывая существование пределов

$\lim_n \sum_{k=1}^{n} t_k\xi_k$ и $\lim_n \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu}\xi_\nu$ для всех $x\in c_A^\lambda$,

мы получаем из выражения $\gamma_n^B(x)$, что предел $\lim_n \gamma_n^B(x)$ существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \lambda_k \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k\nu}\xi_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu}\xi_\nu\right) + \mu\, \gamma_n^A\right) =$$

$$= \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \lambda_k \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k\nu}\xi_\nu - \lim_A x\right) + \mu\, \gamma_n^A -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \lambda_k \lambda_n \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n\nu}\xi_\nu - \lim_A x\right)\right) =$$

$$= \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \gamma_k^A + \left(\mu - \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \lambda_k\right) \gamma_n^A\right) =$$

$$= \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \gamma_k^A + \varrho_n \gamma_n^A\right),$$

где

$$\varrho_n = \mu - \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \lambda_k .$$

Так как $(\tau_k) \in \ell$ и $\lim \lambda_n = \infty$, то по теореме Хана

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k \lambda_k = 0.$$

Учитывая лемму получаем, что предел $\lim_n \gamma_n^B(x)$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim_n \gamma_n^A(x)$, т.е. $x \in c_A^\lambda$.

Теорема доказана.

Литература

1. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов. – Таллин: Валгус, 1977. – 280 с.
2. Кангро Г. О λ-совершенности методов суммирования и ее применениях. I // Изв. АН ЭстССР. Физ., матем. – 1971. – т. 20, № 2. – С. 111–120.
3. Кангро Г. О λ-совершенности методов суммирования и ее применениях. II // Изв. АН ЭстССР. Физ., матем. – 1971. Т. 20, № 4. – С. 375–385.
4. Zeller, K. Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren // – Math. Z. – 1951. – Bd. 53, N° 5. – S. 463 – 487.

Поступило 12.12.88

Zeller's theorem for the λ-summability

E. Jürimäe

Summary

Let $\lambda=(\lambda_n)$ be a sequence, where $0<\lambda_n\nearrow\infty$. If A is matrix (a_{nk}) and x a sequence (ξ_k), we put $\eta_n=\sum_k a_{nk}\xi_k$, $\lim_n \eta_n=\eta$, $\gamma_n^A(x)=\lambda_n(\eta_n-\eta)$, $\gamma^A(x)=\lim_n \gamma_n^A(x)$ and $c_A^\lambda = \{x=(\xi_k) \mid \gamma^A(x) \text{ exists}\}$. We use the FK-topology on c_A^λ as described in [2]. Any functional $f\in(c_A^\lambda)'$, the continuous dual of c_A^λ, can be represented in the form (2).

The purpose of this paper is to prove the following theorem.

Theorem. 1) For each $f\in(c_A^\lambda)'$ there exists a matrix B such that $c_B^\lambda \supset c_A^\lambda$ and $\gamma^B(x)=f(x)$ for all $x\in c_A^\lambda$.

2) If the functional f has a representation (2) with $\mu\neq 0$, then there is a matrix B such that $c_B^\lambda = c_A^\lambda$ and $\gamma^B(x)=f(x)$ for all $x\in c_A^\lambda$.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та,1989,846,166-171

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВОЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ I

Э. Реймерс

Тартуский государственный университет

Введение

Проблема эквивалентности обычной последовательности $x=(x_k)$ с A-преобразованной последовательностью $y=(y_n)$ рассмотрена автором в статье [I]. В настоящей работе аналогичные результаты даны для двойных последовательностей $x=(x_{kl})$ в случае классов c, bc и rc. Из этих теорем как частные случаи вытекают теоремы тауберова типа для этих классов последовательностей c, bc и rc.

Если пределы изменения индексов не указаны, то они имеют все целочисленные значения 0,1,2,... .

§ I. Обозначения и определения

Мы будем рассматривать следующие классы двойных последовательностей $x=(x_{kl})$: b – класс ограниченных последовательностей (существует число M такое, что $|x_{kl}|\leq M$), c – класс сходящихся последовательностей (существует предел $\lim\limits_{kl\to\infty} x_{kl}=\xi\neq\pm\infty$), bc – класс ограниченных сходящихся последовательностей ($x\in c$ и $x\in b$), rc – класс регулярно сходящихся последовательностей ($x\in c$, $\exists\lim\limits_{k\to\infty} x_{kl}\neq\pm\infty$ и $\exists\lim\limits_{l\to\infty} x_{kl}\neq\pm\infty$) и классы к нулю сходящихся последовательностей cn ($x\in c$ и $\xi=0$), bcn ($x\in bc$ и $\xi=0$), rcn ($x\in rc$ и $\xi=0$).

Пусть задана треугольная матрица $A=(a_{mnkl})$ которая преобразовывает последовательность $x=(x_{kl})$ в последовательность $y=(y_{mn})$ равенством

$$y_{mn}=A_{mn}(x)=\sum_{kl=0}^{mn} a_{mnkl}x_{kl}. \tag{I.I}$$

Ниже будет встречаться еще величина

$$A_{mnkl}(x) = \sum_{ij=0}^{kl} a_{mnij} x_{ij}.$$

Предположим, что $x_{kl} \neq 0$, тогда мы сможем ввести следующие определения.

Мы скажем, что последовательности x и y c-эквивалентны, если

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{y_{mn}}{x_{mn}} = 1, \tag{I.2}$$

и пишем $x \underset{c}{\sim} y$.

Мы скажем, что последовательности x и y bc-эквивалентны, если выполняется условие (2) и $(y_{mn}/x_{mn}) \in b$, и пишем $x \underset{bc}{\approx} y$.

Мы скажем, что последовательности x и y rc-эквивалентны, если выполняется условие (2) и $(y_{mn}/x_{mn}) \in rc$, и пишем $x \underset{rc}{\approx} y$.

Пусть $e = (\xi_{kl})$ обозначает двойную последовательность, где $\xi_{kl}=1$. Тогда

$$A_{mn}(e) = \sum_{kl=0}^{mn} a_{mnkl}.$$

Для этой величины определим условия

$$\lim_{m,n\to\infty} A_{mn}(e) = 1, \tag{I.3}$$

$$\lim_{m\to\infty} A_{mn}(e) = 1, \tag{I.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_{mn}(e) = 1. \tag{I.5}$$

Для разностей членов последовательности (a_{mn}) будем пользоваться обозначениями

$$\Delta_m a_{mn} = a_{mn} - a_{m+1\,n},$$
$$\Delta_n a_{mn} = a_{mn} - a_{m\,n+1},$$
$$\Delta_{mn} a_{mn} = \Delta_m \Delta_n a_{mn} = \Delta_m (a_{mn} - a_{m\,n+1}) =$$
$$= a_{mn} - a_{m+1\,n} - a_{m\,n+1} + a_{m+1\,n+1}.$$

§ 2. Условия эквивалентности последовательностей

В этом параграфе мы дадим точные т.е. необходимые и достаточные условия для c- , bc- и rc-эквивалентности последовательностей x и y. Для этого рассмотрим следующее равенство

$$\frac{y_{mn}}{x_{mn}} = A_{mn}(e) - F_{mn}(x), \tag{2.I}$$

где

$$F_{mn}(x) = \sum_{kl=0}^{m-1\, n-1} \Delta_{kl} \frac{1}{x_{kl}} A_{mnkl}(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_k \frac{1}{x_{kn}} A_{mnkn}(x) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n-1} \Delta_l \frac{1}{x_{ml}} A_{mnml}(x)$$

Это равенство (2.I) доказывается аналогично, как соответствующее равенство для обычных последовательностей (см. [I]).

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.I. Если матрица A удовлетворяет условию (I.3), то

$$x \underset{c}{\sim} y \iff (F_{mn}(x)) \in cn. \tag{2.2}$$

Теорема 2.2. Если матрица A удовлетворяет условиям (I.3) и $(A_{mn}(e)) \in bc$, то

$$x \underset{bc}{\sim} y \iff (F_{mn}(x)) \in bcn. \tag{2.3}$$

Теорема 2.3. Если матрица A удовлетворяет условиям (I.3), (I.4) и (I.5), то

$$x \underset{rc}{\sim} y \iff (F_{mn}(x)) \in rcn. \tag{2.4}$$

Доказательства этих теорем вытекают непосредственно из равенства (2.I).

§ 3. Тауберовы теоремы

Говорят, что последовательность x A_c-суммируема методом $A = (a_{mnkl})$ к сумме $A(x)$, если

$$\lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = A(x), \tag{3.I}$$

и пишут

$$A_c\text{-}\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = A(x).$$

Множество всех A_c-суммируемых последовательностей обозначим через cA.

Говорят, что последовательность x A_{bc}-суммируема методом $A=(a_{mnkl})$ к сумме $A(x)$, если выполняется условие (3.I) и $(y_{mn})\in bc$, и пишут

$$A_{bc}-\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = A(x).$$

Множество всех A_{bc}-суммируемых последовательностей обозначим через bcA.

Говорят, что последовательность x A_{rc}-суммируема методом $A=(a_{mnkl})$ к сумме $A(x)$, если выполняется условие (3.I) и $(y_{mn})\in rc$, и пишут

$$A_{rc}-\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = A(x).$$

Множество всех A_{rc}-суммируемых последовательностей обозначим через rcA.

Мы будем предполагать, что метод A сохраняет сумму сходящейся последовательности, если он суммирует эту последовательность, т.е. в этом случае

$$A(x) = \lim_{kl\to\infty} x_{kl}.$$

Из теорем 2.I, 2.2 и 2.3 как частные случаи вытекают следующие теоремы тауберова типа.

Теорема 3.I. Если выполняется условие (I.3), то

$$[x\in cA \Rightarrow x\in c] \Leftrightarrow (F_{mn}(x))\in cn.$$

Теорема 3.2. Если выполняется условие (I.3) и $(y_{mn})\in bc$, то

$$[x\in bcA \Rightarrow x\in bc] \Leftrightarrow (F_{mn}(x))\in bcn.$$

Теорема 3.3. Если выполняются условиях (I.3),(I.4) и (I.5), то

$$[x\in rcA \Rightarrow x\in rc] \Leftrightarrow (F_{mn}(x))\in rcn.$$

Тауберовы теоремы аналогичного типа для обычных последовательностей имеются в статье [2].

Литература

I. Реймерс Э. Проблема эквивалентности последовательностей и тауберовы теоремы I // Уч. зап. Тарт. ун-та. – I982. – Вып. 596. – С. I5–23.

2. Реймерс Э. Мультипликаторные методы суммирования и теоремы тауберова типа // Уч. зап. Тарт. ун-та. – I98I. – Вып. 504. – С. 85–89.

Поступило I2.I2.88

THE EQUIVALENCE OF DOUBLE SEQUENCES AND TAUBERIAN THEOREMS I

E. Reimers

Summary

Let $A=(a_{nk})$ be a matrix of real numbers. The problem of equivalence of ordinary sequences $x=(x_k)$ with the A-transformed sequence $y=(y_n)$ was considered by the author in [1]. In the present paper analogous results are given for double sequences of the classes c, bc and rc.

Let $x=(x_{kl})$ be a double sequence of real numbers. The sequence x is called bounded if there exists a constant M such that $|x_{kl}|\leq M$ and c-convergent if there exists finite limit $\lim\limits_{k,l\to\infty} x_{kl}=\xi$. The sets of all bounded and convergent sequences we denote by b and c respectively. The sequence x is called bc-convergent if $x\in b$ and $x\in c$ and rc-convergent if $x\in c$ and there exists finite limits $\lim\limits_{k\to\infty} x_{kl}$ and $\lim\limits_{l\to\infty} x_{kl}$. The sets of these sequences we denote by bc and rc respectively. The subsets of c, bc and rc where $\xi=0$ we denote by cn, bcn and rcn respectively.

The A-transform by the triangular matrix $A=(a_{mnkl})$ of the sequence $x=(x_{kl})$ we define by (1.1). We say that the sequences x and y are c-equivalent if the condition (1.2) is fulfilled and write $x \underset{c}{\sim} y$. We say that the cequences x and y are bc-equivalent (rc-equivalent) if the condition (1.2) is fulfilled and $(y_{mn}/x_{mn})\in bc$ $\left((y_{mn}/x_{mn})\in\right.$ $\left.\in rc\right)$

The following equivalence theorem is proved.

Theorem 2.1. If the matrix A satisfies the condition (1.3), then

$$x \underset{c}{\sim} y \Longleftrightarrow \left(F_{mn}(x)\right)\in cn,$$

where $F_{mn}(x)$ is given by (2.1).

Analogous results are given also for the equivalences $x \underset{bc}{\sim} y$ and $x \underset{rc}{\sim} y$ (see theorems 2.2 and 2.3).

The sequence x is called A_c-summable (A_{bc}-summable, A_{rc}-summable) to the sum $A(x)$ if $y\in c$ $(y\in bc$, $y\in rc)$ and

$$\lim_{m,n\to\infty} A_{mn}(x)=A(x).$$

As a particular case of the equivalence theorem 2.1 we get

the following Tauberian theorem.

Theorem 3.1. If the matrix A satisfies the condition (1.3), then the A_c-summable sequence x is c-convergent if and only if $(F_{m,n}(x)) \in cn$.

Analogous results are given also for the A_{Bc}- and $A_{\tau c}$-summable sequences (theorems 3.2 and 3.3).

In the second part of this paper we give simplefied sufficient conditions for the assertions above.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS INHALT

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 846.
ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ.
Труды по математике и механике.
На разных языках.
Резюме на разных языках.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор Э. Реймерс.
Подписано к печати 7.02.1989.
МВ 01335.
Формат 60x90/16.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 9,89. Печатных листов 11,0+0,25 п.л. вкл.
Тираж 400.
Заказ № 63.
Цена 2 руб.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.
2 - 2